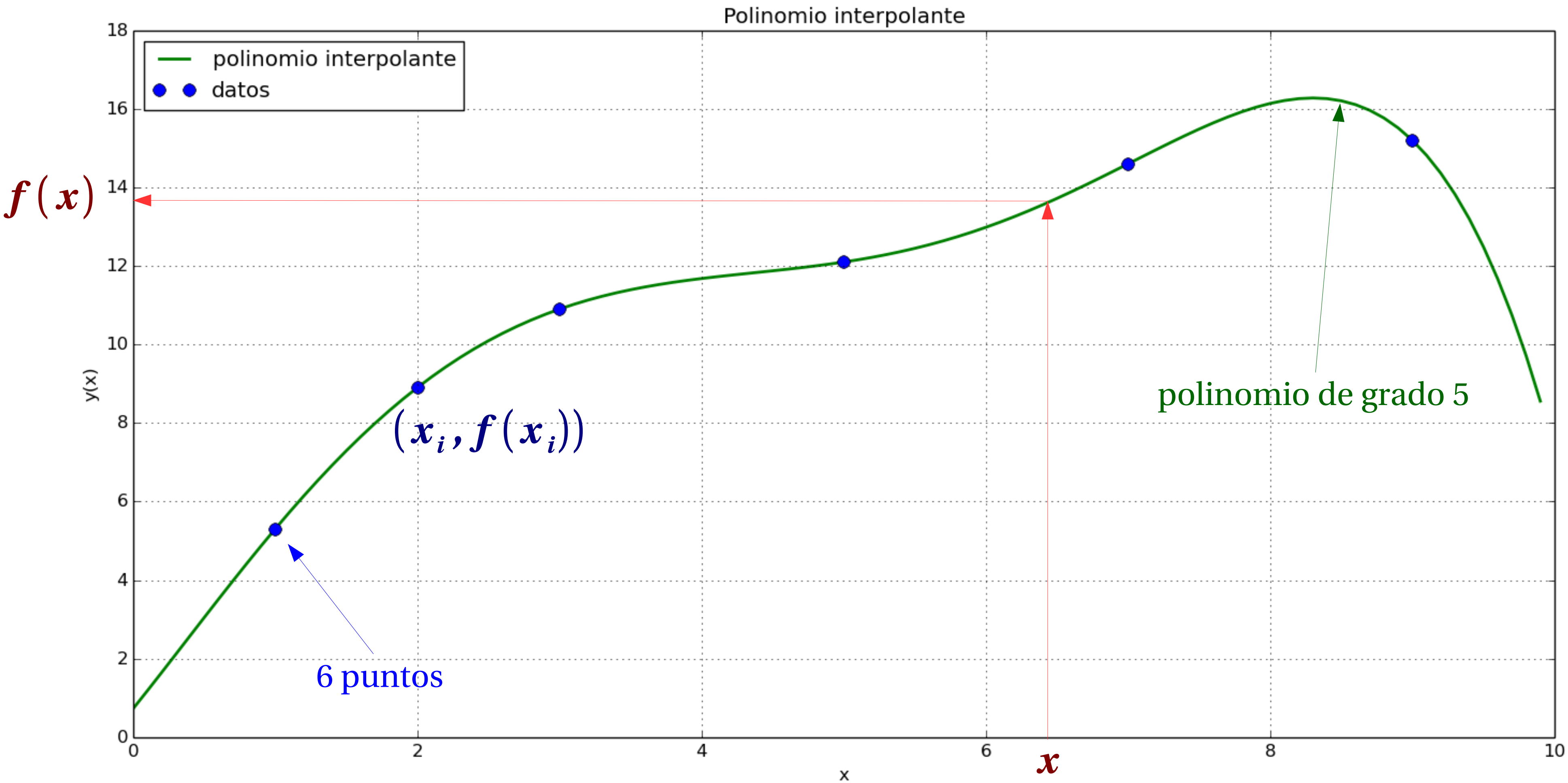
Interpolación Polinomial

Dados ***n*+1 puntos distintos** **(x_i,$f(x_i)$)**, obtener el único **polinomio de grado *n*** que pase por todos ellos para **estimar $f(x)$**.



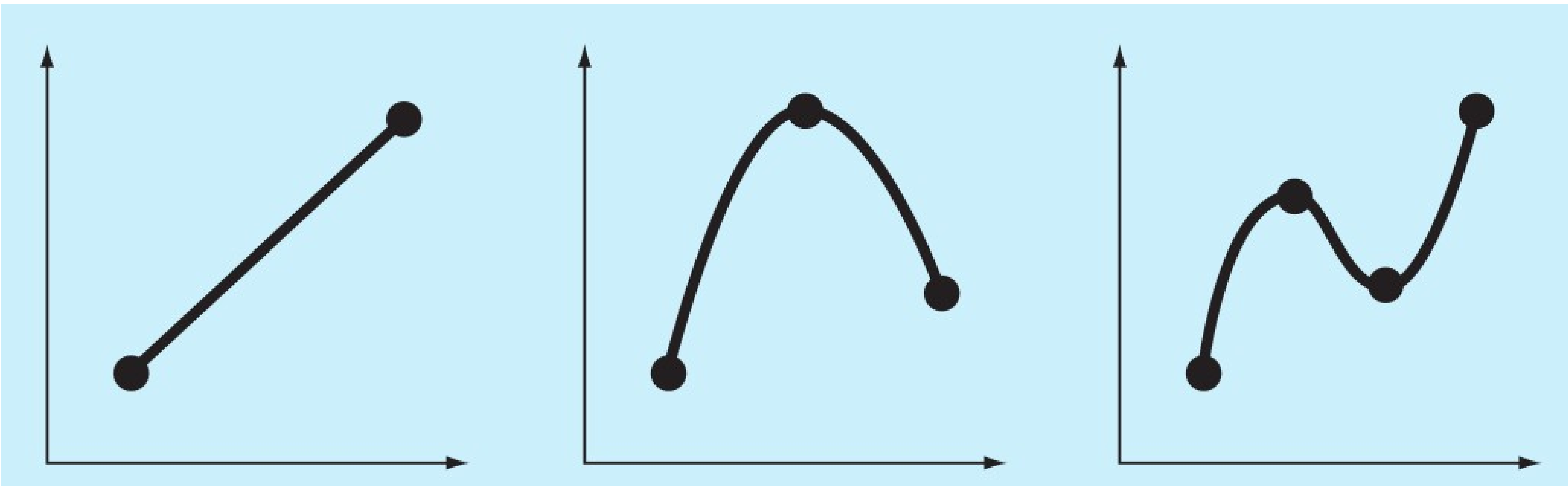
Interpolación Polinomial

Datos con error importante $\longrightarrow$ Regresión

Datos muy precisos $\longrightarrow$ **Interpolación**

Los datos se obtienen a través de mediciones o mediante cálculos.

Ejemplos de Interpolación Polinomial

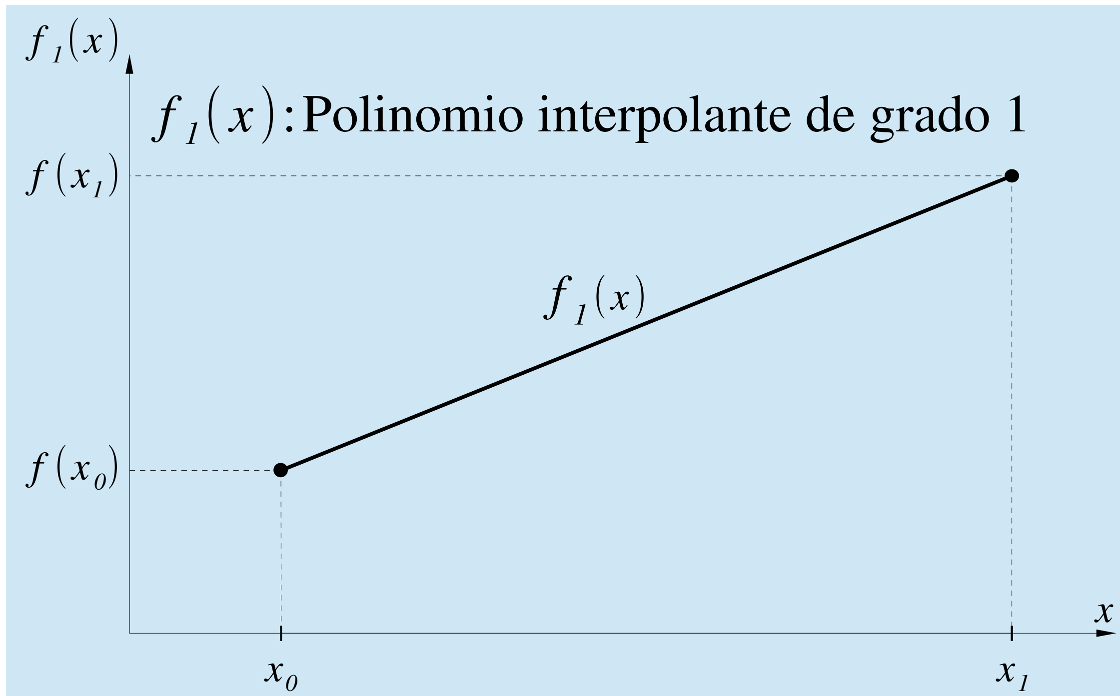


De primer grado (lineal) | De segundo grado (cuadrática) | De tercer grado (cúbica)

Polinomio de Interpolación de Lagrange de 1º Grado

$$f_1(x) = a_1(x - x_1) + a_0(x - x_0) \quad (1)$$

Polinomio interpolante de 1º grado



Sustituimos $x = x_0$ en (1):

$$f(x_0) = a_1(x_0 - x_1)$$

$$a_1 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)} \qquad (2)$$

Sustituimos $x = x_1$ en (1):

$$f(x_1) = a_0(x_1 - x_0)$$

$$a_0 = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)} \qquad (3)$$

Polinomio de Interpolación de Lagrange de 1º Grado

Reemplazamos a_0 y a_1 dados por (2) y (3) en (1):

$$f_1(x)=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)}(x-x_1)+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)}(x-x_0)$$

Reordenamos:

$$f_1(x)=\underbrace{\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}}_{L_0(x)}f(x_0)+\underbrace{\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}}_{L_1(x)}f(x_1)$$

$L_0(x)$ y $L_1(x)$ se denominan lagrangianos.

$$\boxed{f_1(x)=L_0(x)\,f(x_0)+L_1(x)\,f(x_1)}$$

Polinomio de Lagrange de 1º grado

Propiedades de los Lagrangianos

$$L_i(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = x_i \\ 0 \text{ si } x = x_j \end{cases}$$

Para un polinomio de Lagrange de grado 1:

$$L_0(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = x_0 \\ 0 \text{ si } x = x_1 \end{cases}$$

$$L_1(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = x_1 \\ 0 \text{ si } x = x_0 \end{cases}$$

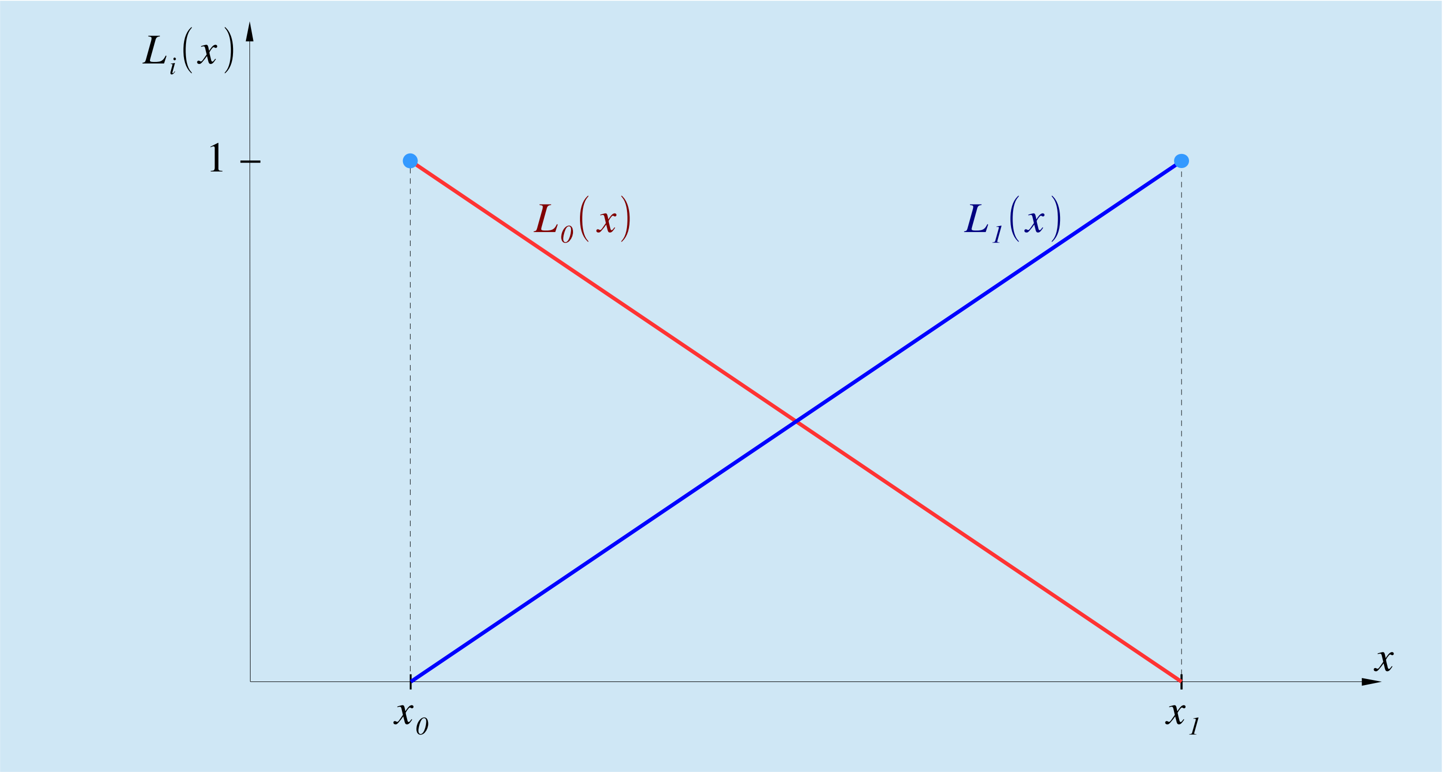


Gráfico del Polinomio de Interpolación de Lagrange de 1º Grado

Evaluación en $x = x_0$:

$L_0(x_0) = 1 \quad L_1(x_0) = 0$

$$f_1(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1)$$
$$= f(x_0)$$

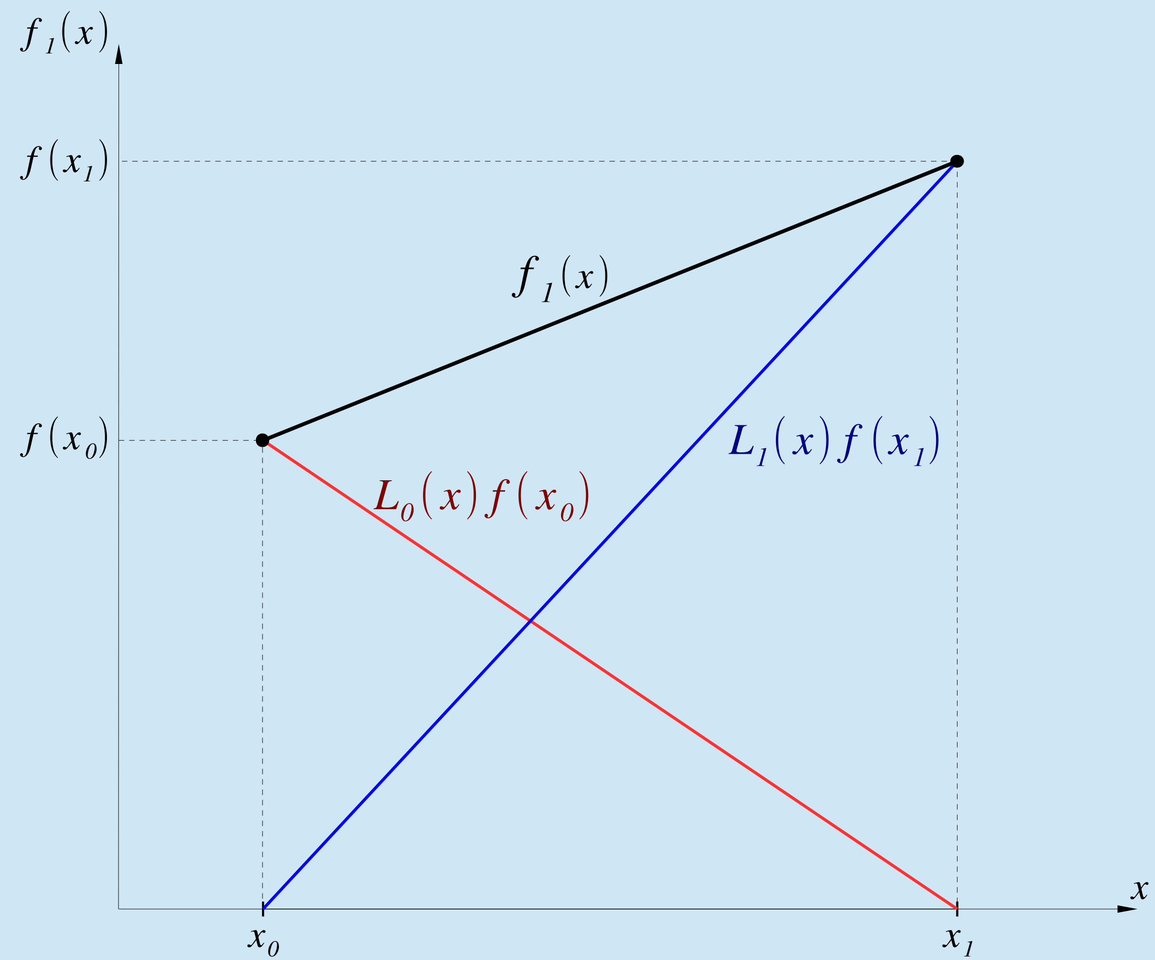
Evaluación en $x = x_1$:

$L_0(x_1) = 0 \quad L_1(x_1) = 1$

$$f_1(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1)$$
$$= f(x_1)$$

$f_1(x)$: Polinomio interpolante de Lagrange de grado 1

$$\boxed{f_1(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)}$$



Polinomios de Interpolación de Lagrange – Expresión General

Expresión de un polinomio de interpolación de Lagrange de grado n:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) \cdot f(x_i)$$

donde los lagrangianos se definen como:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_i - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_i - x_1)} \cdots \frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} \cdots \frac{(x - x_n)}{(x_i - x_n)}$$

Polinomio de Lagrange de 2º Grado

$$f_2(x) = L_0(x)\,f(x_0) + L_1(x)\,f(x_1) + L_2(x)\,f(x_2)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}$$

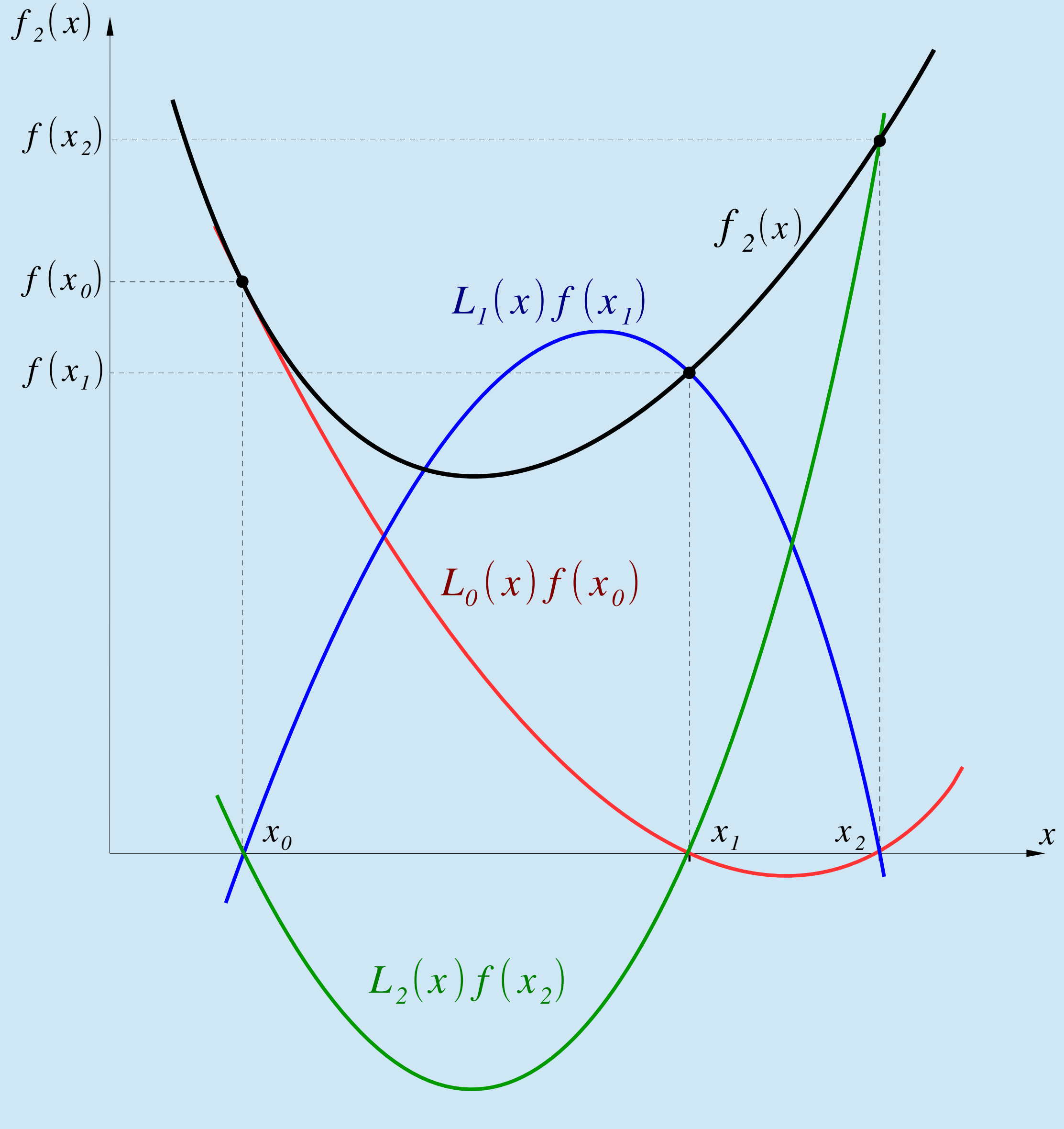
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_2-x_0)}\frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}$$

Polinomio de Lagrange de 2º Grado

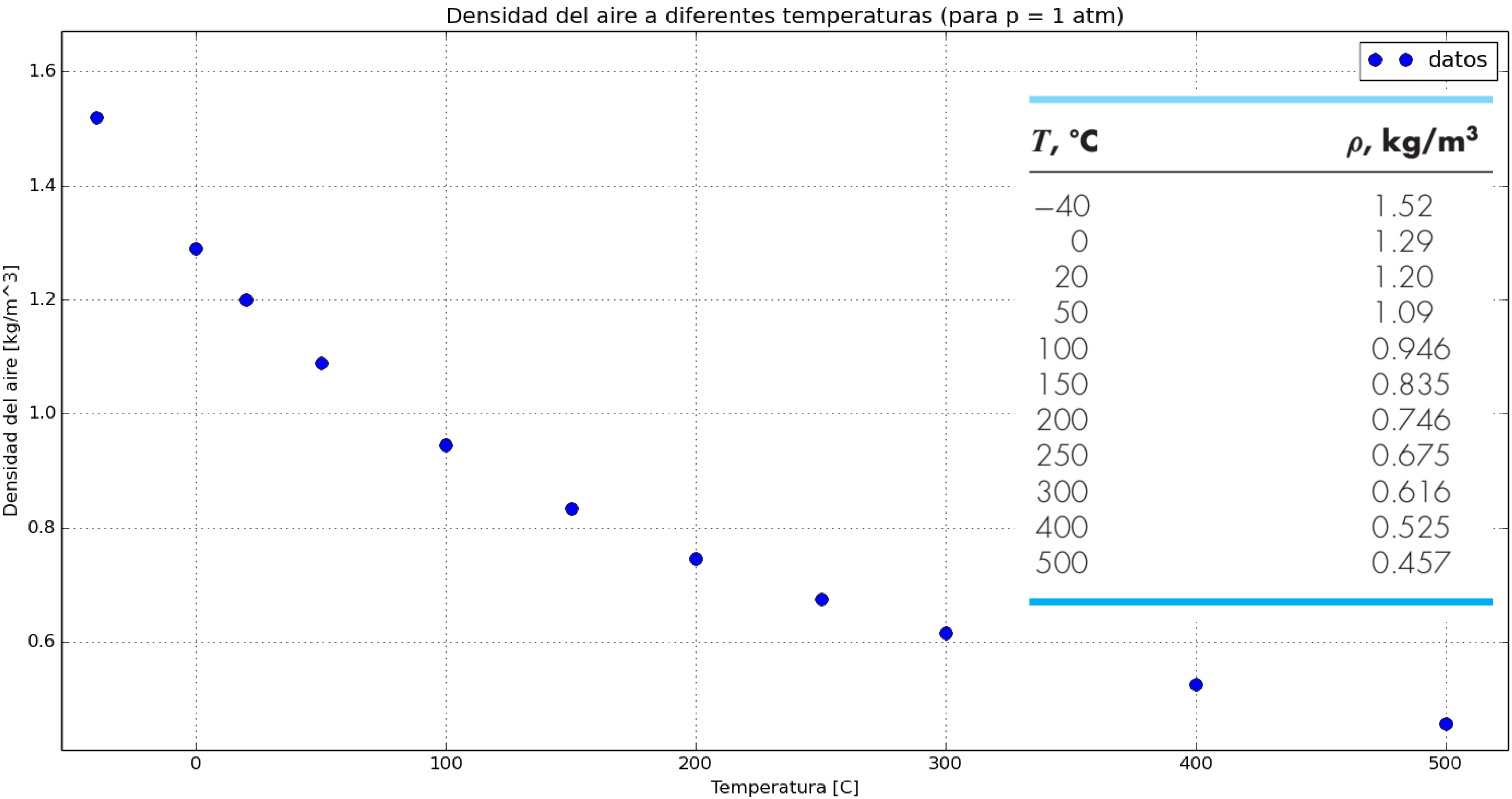
$f_2(x)$: Polinomio interpolante de Lagrange de grado 2

$$\boxed{f_2(x) = L_0(x)\,f(x_0) + L_1(x)\,f(x_1) + L_2(x)\,f(x_2)}$$



Ejemplo de Aplicación: Enunciado

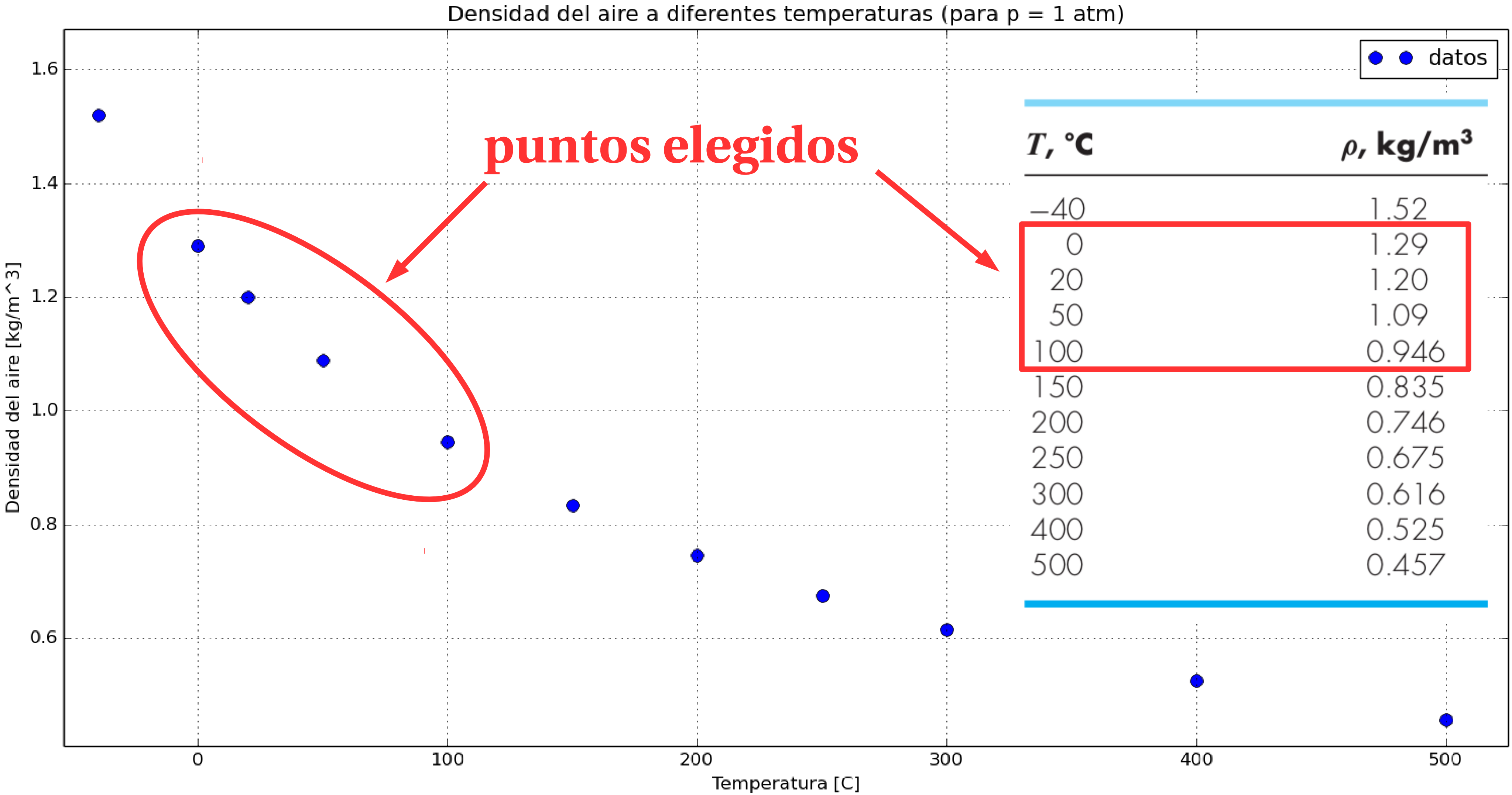
Estimar la densidad del aire para una temperatura de 70 ºC mediante un polinomio de Lagrange de tercer grado:



T, °C	ρ, kg/m³
−40	1.52
0	1.29
20	1.20
50	1.09
100	0.946
150	0.835
200	0.746
250	0.675
300	0.616
400	0.525
500	0.457

Ejemplo de Aplicación: Solución

Se deben **elegir los valores de x_i** **más cercanos** **a $x = 70$**, y sus respectivos valores de $f(x_i)$



T, °C	ρ, kg/m^3
−40	1.52
0	1.29
20	1.20
50	1.09
100	0.946
150	0.835
200	0.746
250	0.675
300	0.616
400	0.525
500	0.457

Ejemplo de Aplicación: Solución

$x_0 = 0 \qquad x_1 = 20 \qquad x_2 = 50 \qquad x_3 = 100$

$f(x_0) = 1{,}29 \qquad f(x_1) = 1{,}20 \qquad f(x_2) = 1{,}09 \qquad f(x_3) = 0{,}946$

$x = 70 \qquad f_3(x = 70) = ?$

$$L_0(x=70) = \frac{(70 - x_1)}{(x_0 - x_1)} \frac{(70 - x_2)}{(x_0 - x_2)} \frac{(70 - x_3)}{(x_0 - x_3)} = 0{,}3$$

$$L_1(x) = \frac{(70 - x_0)}{(x_1 - x_0)} \frac{(70 - x_2)}{(x_1 - x_2)} \frac{(70 - x_3)}{(x_1 - x_3)} = -0{,}875$$

$$L_2(x=70) = \frac{(70 - x_0)}{(x_2 - x_0)} \frac{(70 - x_1)}{(x_2 - x_1)} \frac{(70 - x_3)}{(x_2 - x_3)} = 1{,}4$$

$$L_3(x) = \frac{(70 - x_0)}{(x_3 - x_0)} \frac{(70 - x_1)}{(x_3 - x_1)} \frac{(70 - x_2)}{(x_3 - x_2)} = 0{,}175$$

$$f_3(x=70) = 0{,}3 \cdot 1{,}29 + (-0{,}785) \cdot 1{,}20 + 1{,}4 \cdot 1{,}09 + 0{,}175 \cdot 0{,}946$$

$$\boxed{f_3(x=70) = 1{,}029}$$

Interpolación de Lagrange: Pseudocódigo

```
# algoritmo  para estimar y(x) mediante un  polinomio
# interpolante de Lagrange (de grado n) a partir de
# los datos X, Y.

leer X, Y, x, n         # X,Y: vectores; n+1: tamaño de Y
suma = 0                # n: grado del polinomio
repetir para i desde 0 hasta n:
   producto = Y(i)
   repetir para j desde 0 hasta n:
      si j es distinto de i:
         producto = producto * (x-X(j)) / (X(i)-X(j))
   suma = suma + producto
mostrar suma      # muestra la estimación y(x)
```

Interpolación de Lagrange: Observaciones importantes

Implementación en Python:

Lagrange.py (módulo)

interpLagrange.py

graficoPoli.py

Interpolación de Lagrange: Observaciones Importantes

- Se deben elegir los valores x_i más cercanos al valor de x donde se quiere estimar $f(x)$.
- No es necesario que los valores de x_i estén uniformemente distribuidos.
- No se debe trabajar con polinomios de alto grado.