## UNIDAD 1

Error Aproximado = $\frac{Aproximación\ Actual - Aproximación\ Anterior}{Aproximación\ Actual}\ x\ 100\%$

Las iteraciones de los métodos continúan hasta que:

$|Ea| < Es$ Tolerancia Porcentual

Para asegurar n cifras significativas:

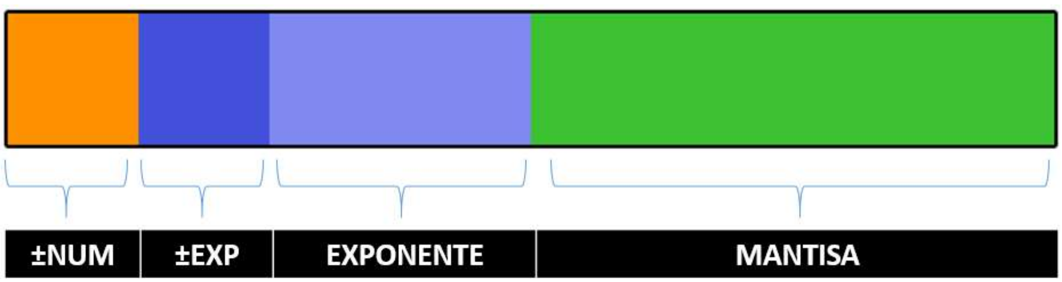
$Es = (0.5 * 10^{2-n})$ en porcentaje

$$n = 2 - \log\left(\frac{Es}{0.5}\right) = 2 - \log(2Es)$$

PUNTO FLOTANTE

$m * b^e\ ;\ \frac{1}{b} \leq m \leq 1$(Valores de Mantisa Permitidos)

m: mantisa, b: base, e: exponente.




Para el signo 0 es positivo y 1 es negativo.

## UNIDAD 2

**Solución de Ecuaciones no Lineales**

### Métodos Cerrados:

- La función cambia de signo en la vecindad de una raíz.
- Dos valores iniciales que encierren la raíz
- Reducen el tamaño del intervalo hasta converger en la raíz aproximada.
- No se pueden usar métodos cerrados para raíces múltiples pares

<u>Bisección y Falsa Posición</u>

## Método de Bisección

Para verificar la existencia de raíces en el intervalo elegido se utiliza:

$f_{(xl)} * f_{(xu)} < 0$ Hay un número de raíces impares

$f_{(xl)} * f_{(xu)} > 0$ No hay raíces encerradas o hay un número par de ellas.

Se aproxima a la raíz como el punto medio del intervalo.

$$\boldsymbol{x_r = \frac{xl + xu}{2}}$$

Ahora debemos seleccionar el intervalo donde la función cambie de signo. Iterando de esta manera convergemos a la raíz de manera aproximada.

## Método de Falsa Posición (Regula Falsi)

Se aproxima a la raíz como la intersección de la recta entre los dos puntos con el eje x.

$$\boldsymbol{x_r = x_u - \frac{f(xu) * (xl - xu)}{f(xl) - f(xu)}}$$

De la misma forma en que se determina en Bisección si el intervalo encierra la raíz se determinan los puntos para continuar con la iteración de este método.

## Método de Falsa Posición Modificado

Existen problemas si la función es casi constante, ya que el avance hacia la raíz es lento en cada iteración, lo que se hace es detectar estos puntos mediante contadores y se divide por dos el valor de la función en el punto estancado.

# Métodos Abiertos

- No requieren que el intervalo inicial encierre la raíz
- En general, son más eficientes que los cerrados, aunque no siempre funcionan.
- Se extienden para sistemas de ecuaciones no lineales.

## Método de Iteración de Punto Fijo

Idea: Reescribir la ecuación $f(x) = 0$ como $x = g(x)$

Esta nueva definición de la ecuación debe converger.

Esquema iterativo: $x_{i+1} = g(x_i)$

Error Aproximado:

$$Ea = \left|\frac{x_i - x_{i-1}}{x_i}\right| . 100\%$$

## Método de Newton-Raphson

Se iguala la pendiente a

$$f'(xi) = \frac{f(xi) - 0}{xi - x_{i+1}}$$

Despejando se tiene:

$$\boldsymbol{x_{i+1} = x_i - \frac{f(xi)}{f'(xi)}}$$

El teorema de Newton-Raphson demuestra que se asegura la convergencia si |g'(x)| < 1 en todo el intervalo de análisis.

Desventajas:

No se puede trabajar si las curvas de la función son muy suaves, es decir la pendiente es prácticamente 0.

Si la función es muy sinuosa con varias raíces, el método puede escapar hacia otra raíz y no la de interés.

## Método de la Secante

Se aproxima a la derivada $f'(x)$ de Newton-Raphson con una diferencia finita hacia atrás:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

Sustituyendo en la fórmula de N-R y despejando $x_{i+1}$:

$$\boldsymbol{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) * (x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}}$$

Si bien necesita 2 puntos, no se clasifica como un método cerrado.

Los métodos de N-R y de la Secante tienen convergencia lineal cuando hay raíces múltiples.

## RAICES DE POLINOMIOS

- **Deflación Polinomial**
- **Método de Müller**

## Deflación Polinomial

Permite encontrar sucesivamente las raíces de un polinomio mediante la aplicación con otros métodos.

Una vez encontrada una raíz, se divide al polinomio por (x-raíz). El nuevo polinomio ahora ya no tiene la raíz que se había obtenido.

## Método de Müller

El método de la secante con dos puntos se obtenía una función lineal para aproximar al punto de raíz, en este caso el método de Müller utiliza tres puntos para armar una función cuadrática.

Se escribe la función cuadrática de la forma:

$$f(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c$$

Ver pasos de obtención de los valores en las filminas

$$\boldsymbol{x_3 = x_2 - \frac{2\,c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}}$$

El signo central se elige para que coincida con el de b.

Al obtener un punto nuevo se descarta el más alejado.

# UNIDAD 3

## Ecuaciones Algebraicas Lineales

## Eliminación de Gauss Simple

Teniendo la matriz, aplicando operaciones elementales de fila (Fj + k* Fi) para dejarla de forma triangular superior. (Eliminación hacia adelante)

En este punto se realiza la sustitución hacia atrás:

$$\boldsymbol{x_i = \frac{b_i^{i-1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{i-1} * x_j}{a_{ii}^{i-1}}}$$

Con i = n-1, n-2, … , 1

Problemas en los métodos de eliminación:

División por Cero

Errores de redondeo

Sistemas mal condicionados

Técnica del Pivoteo:

Antes de reducir cada fila de la matriz se determina el coeficiente más grande en valor absoluto por debajo del pivote y se intercambia de modo que los pivotes sean los elementos de mayor valor absoluto.

**Descomposición LU**

- Común
- Con eliminación de Gauss
- Con Pivoteo

**Matrices Bandeadas**

**Sistemas Tridiagonales**

**Algoritmo de Thomas:** Método de descomposición LU eficiente con sistemas tridiagonales. Se almacena la matriz en tres vectores para poderlos trabajar mejor sin tener que hacer cálculos con una cantidad grande de ceros.

**Matrices Simétricas**

**Descomposición de Cholesky:** Trabaja con las matrices Simétricas.

## Métodos Iterativos

**Gauss-Seidel:** Utiliza los últimos valores calculados.

**Jacobi:** Utiliza los valores obtenidos en la iteración anterior.

Criterio de convergencia: se demuestra que el método es convergente si la matriz es diagonalmente dominante. Si no se cumple lo anterior al menos se intenta que el elemento de la diagonal es el mayor de toda la fila de la matriz.

# UNIDAD 4

## Optimización

Búsqueda de mínimos o máximos de una función.

Clasificación de Problemas:

Programación Lineal: la función y sus restricciones son lineales.

Programación Cuadrática: la función es cuadrática y sus restricciones lineales.

Programación NO Lineal: La función no es lineal ni cuadrática y las restricciones no son lineales.

Optimización Una Variable no Restringida

Sección Dorada o Áurea

Interpolación Cuadrática

De Newton

**Sección Dorada**

Premisas:

$$l_0 = l_1 + l_2$$

$$R = \frac{l_1}{l_0} = \frac{l_2}{l_1}$$

Donde R es la **razón áurea** y su valor es: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618$

Algoritmo de la SECCION AUREA:

Seleccionar los dos puntos (xl,xu) donde haya un extremo local de f(x).

Calcular los puntos interiores $x_1$ y $x_2$ de la siguiente manera:

$$x_1 = x_l + d$$
$$x_2 = x_u - d$$
$$d = R(x_u - x_l)$$

Se evalúan los puntos obtenidos en la función para ver con qué punto me quedo.

Repetir el procedimiento hasta cumplir: $\varepsilon_a < \varepsilon_s$

**Interpolación Cuadrática**

3 Valores iniciales, el extremo local debe estar en este intervalo.

Busca el vértice de la parábola, eliminando los valores correspondientes a la búsqueda del extremo.

**Método de Newton**

Se basa en el método de N-R de búsqueda de raíces:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Para encontrar el extremo busca la raíz de la primera derivada:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$$

Con esta forma hay que tener cuidado, ya que en los puntos de inflexión la segunda derivada de la función es cero, y el método puede no converger.

**Optimización Multidimensional No Restringida**

Métodos Directos:

- Búsqueda por malla
- Búsqueda aleatoria
- Búsqueda univariada
- Búsquedas patrón
- Método de Powell
- Métodos con gradiente
  - Método de Máxima Inclinación

# UNIDAD 5

## Ajuste de Curvas

**Aplicaciones:**
-Análisis de la tendencia: Predecir valores de la variable dependiente (interpolar o extrapolar)
-Prueba de Hipótesis: Validar un modelo matemático existente con los resultados experimentales o adecuar el modelo a los datos.
-Integración, solución aproximada de ecuaciones diferenciales.

**Regresión por Mínimos Cuadrados:**

<u>Regresión Lineal</u>
<u>Regresión Polinomial (Cuadrática)</u>
<u>Regresión Lineal Múltiple</u>

**Interpolación Lineal:**

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

**Interpolación Cuadrática**

**Forma General de los Polinomios de Interpolación de Newton**

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})$$

$$b_0 = f(x_0)$$
$$b_1 = f[x_1, x_0]$$
$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

**Polinomios de Interpolación de Lagrange:**

El polinomio de interpolación de Lagrange es simplemente una reformulación del polinomio de Newton que evita el cálculo de las diferencias divididas, y se representa de manera concisa como:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

Donde:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

**Interpolación mediante Trazadores o Splines:**
Se dibuja una línea con una cierta curvatura entre los puntos.
Cantidad de Nodos internos y externos, Intervalos.
Se puede aproximar de forma lineal, con derivada primera y segunda.

## UNIDAD 6

Diferenciación e Integración Numérica

**Integración Numérica**

Fórmulas de Integración de Newton-Cotes
Se eligen n+1 puntos {x0, x1, …, xn} en el intervalo [a, b] y se aproxima f(x) con un polinomio de *Lagrange* de grado n:

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)dx = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i * f(x_i)}_{\text{Fórmula de Integración}}$$

Donde: (para i= 0, 1, … , n)

$$a_i = \int_a^b L_i(x)dx$$

**Regla del Trapecio:** Polinomio de Primer Grado.

$$* \, Escribir \; Fórmula \; de \; la \; regla \; del \; trapecio \, *$$

**Regla 1/3 de Simpson:** Se aproxima con una parábola. Polinomio de 2do grado

$$* \, Escribir \; Fórmula \; de \; la \; regla \frac{1}{3} Simpson \, *$$

**Regla 3/8 de Simpson:** Polinomio de 3er grado.

$$* \, Escribir \; Fórmula \; de \; la \frac{3}{8} Simpson \, *$$

**Integración con Segmentos Desiguales:** Apropiada para datos experimentales. Se aplican los distintos métodos en segmentos para hacer el cálculo de manera más aproximada.

**Integración Numérica Eficiente de Funciones**

Extrapolación de Richardson: se usan dos estimaciones numéricas de una integral con el mismo orden de error de truncamiento, para obtener una tercera estimación más exacta.
Algoritmo de Romberg: usa la regla compuesta del trapecio para obtener estimaciones preliminares, aplicando luego el proceso de extrapolación de Richardson para mejorar las aproximaciones.

$$* \, Escribir \text{ Fórmulas de Richardson y Romberg} \, *$$

## Diferenciación Numérica

Extrapolación de Richardson:
A partir de dos estimaciones de $0(h^n)$ se obtiene una aproximación de $0(h^{n+2})$

$$* \, Escribir \text{ Fórmula de la Extrapolación de Richardson} \, *$$

# UNIDAD 7

## Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

**Método de Euler:**
La pendiente se estima como:

$$\emptyset = f(x_i, y_i)$$

Error local $O(h^2)$ – Error global O(h)
El error se reduce reduciendo h
Es exacto para una función lineal f'=0

**Método de Heun:**
Estima por medio del método de Euler el siguiente punto, toma las pendientes y las promedia.
Se puede utilizar de forma iterativa.

**Método del Punto Medio:**
Aproxima el punto siguiente por el método de Euler. Toma la pendiente del punto medio.

**Métodos de Runge-Kutta:**
Forma General: $y_{i+1} = y_i + \emptyset(x_i, y_i, h)h$

**Métodos de Ralston:**
Toma 1/3 de la pendiente en el primer punto y 2/3 de la pendiente en el punto 3/4h.
Su error local es $O(h^3)$ pero es mejor que los dos métodos anteriores.

**Métodos de Runge-Kutta de Tercer Orden:**
Forma Común: $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$

**Métodos de Runge-Kutta de Cuarto Orden:**
Forma Común: $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$