Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Motivación

- Problema del paracaidista

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} v(t)$$

- v: variable dependiente (incógnita)
- t: variable independiente (dato)

- EDOs:
  - De primer orden $$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} v(t)$$
  - De segundo orden $$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + k x = 0$$

EDOs de segundo orden

- Se transforman en un sistema de EDOs de primer orden con una sustitución:

$$y = \frac{dx}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

- reemplazando

$$m\frac{dy}{dt} + cy + kx = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dt} = -\frac{cy+kx}{m}$$

- El sistema,

$$\frac{dx}{dt} = y$$

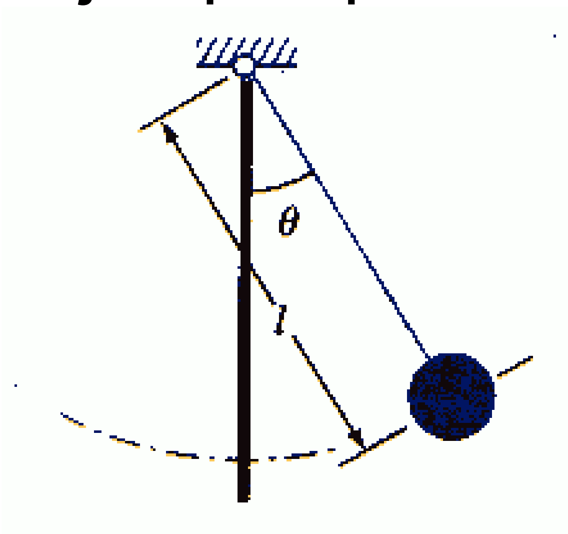
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{cy+kx}{m}$$

Solución de EDOs sin computadora

- En algunos casos se obtiene por integración indefinida:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} v(t) \;\Rightarrow\; v = \int \left(g - \frac{c}{m} v(t) \right) dt \;\Rightarrow\; v(t) = \frac{g\,m}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right)$$

- Técnica habitual: linealización
  - Ejemplo: péndulo



- EDO original (no lineal)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

- Si θ es pequeño (EDO lineal)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Ejemplos de EDOs en Ingeniería

- Segunda ley de Newton del movimiento:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

- Ley del calor de Fourier:

$$q = -k\frac{dT}{dx}$$

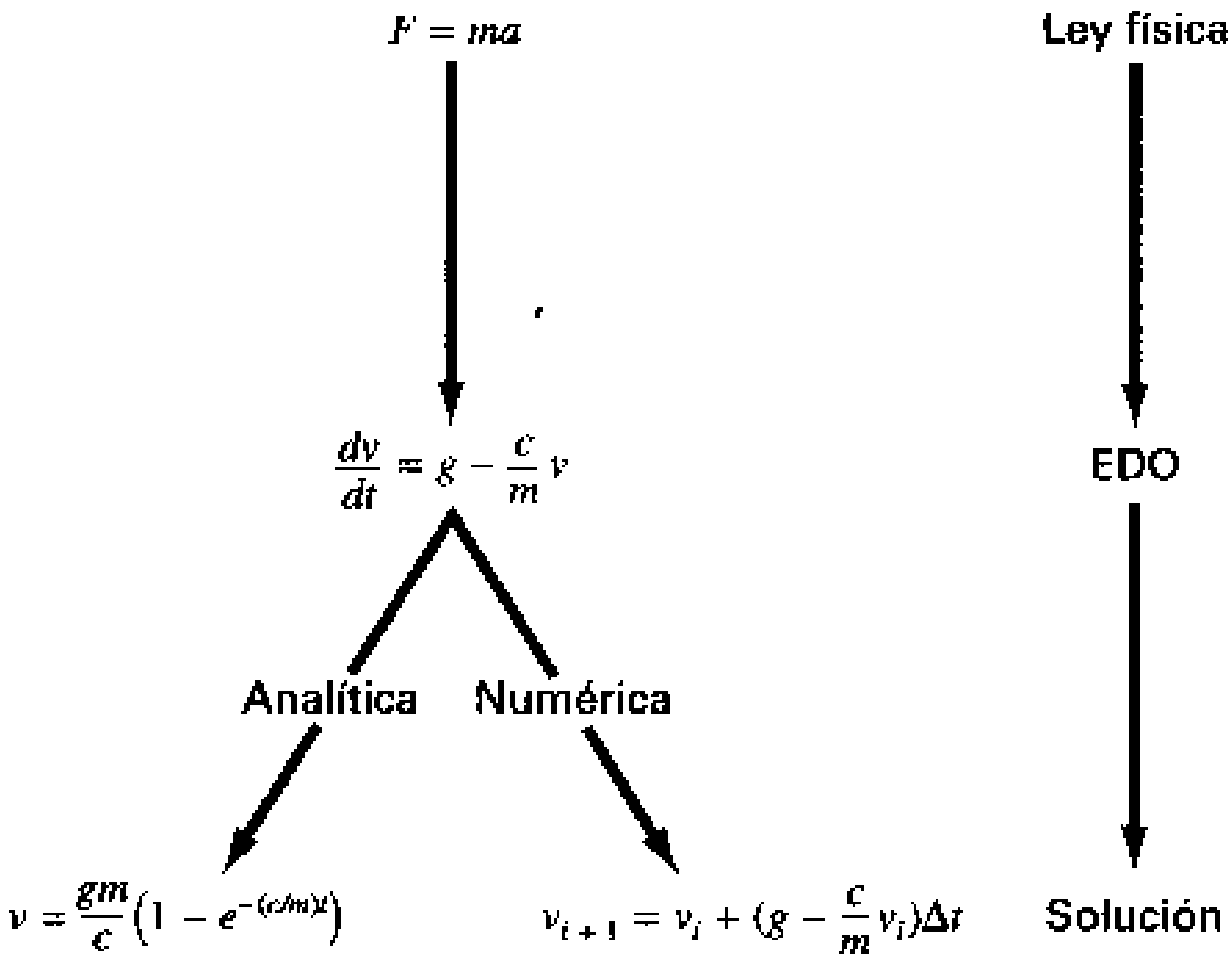
- Ley de difusión de Fick:

$$J = -D\frac{dC}{dx}$$

- Ley de Faraday:

$$\Delta V = L\frac{di}{dt}$$

Solución de problemas



Antecedentes matemáticos

- Solución de una EDO: función de la v.i. Y de las condiciones iniciales.
- Supongamos

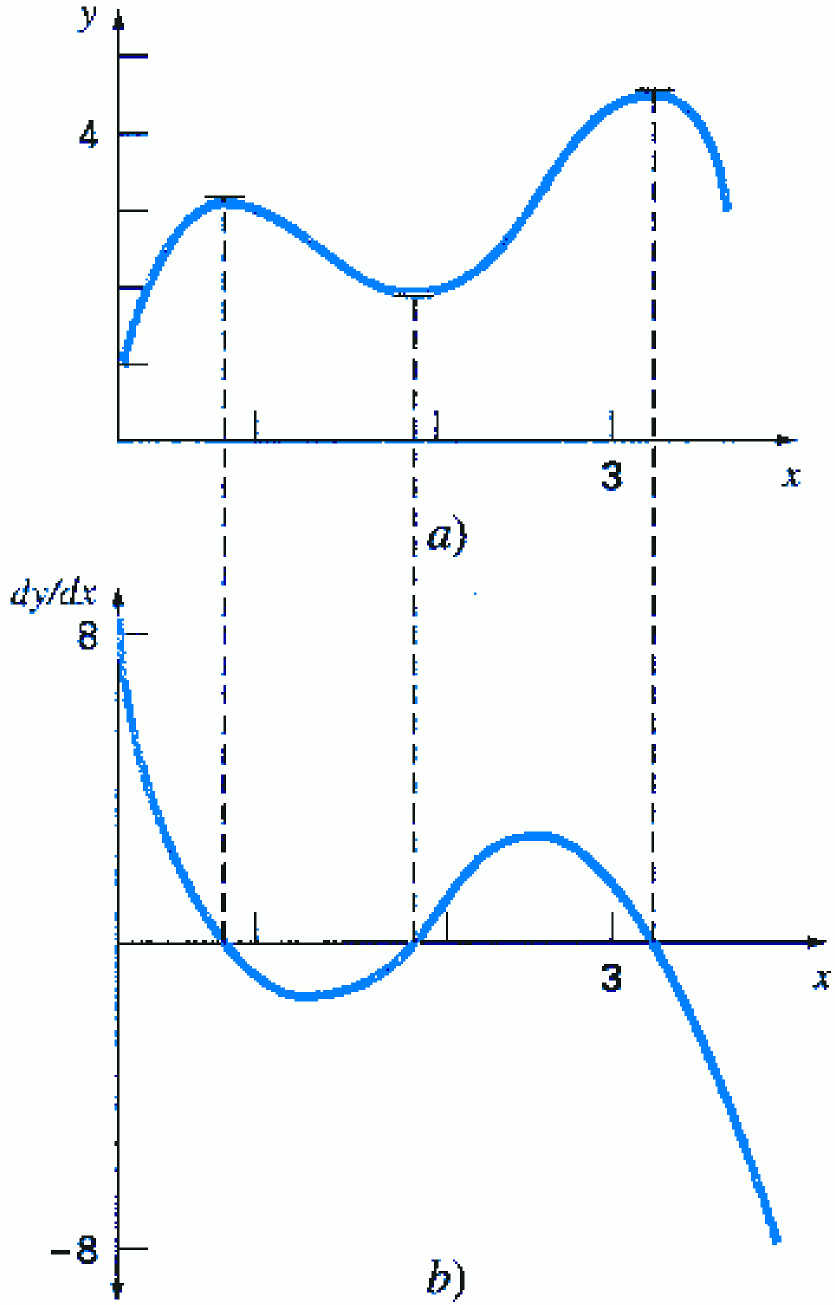
$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

- Derivando,

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

- Graficando,

Antecedentes matemáticos



Antecedentes matemáticos

- Ahora suponemos que debemos resolver la EDO:

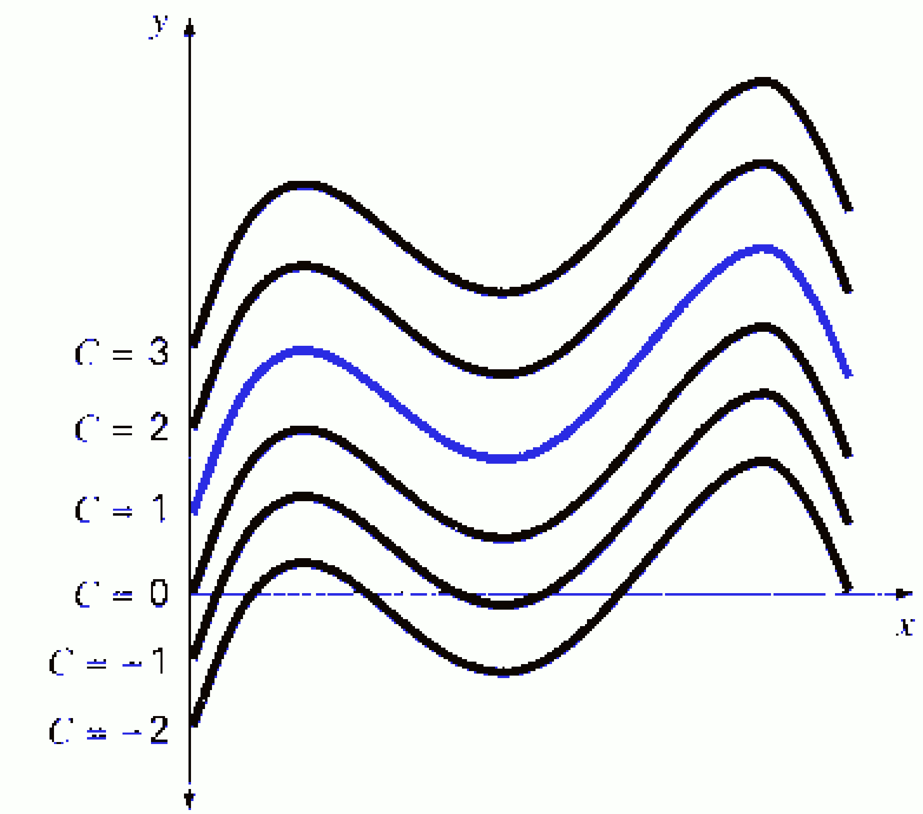
$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

- Integrando,

$$y = \int \left(-2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5\right) dx$$

$$y = \ldots = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + C$$

Solución general



- Cuál de todas las curvas es? Falta más información...

Antecedentes matemáticos

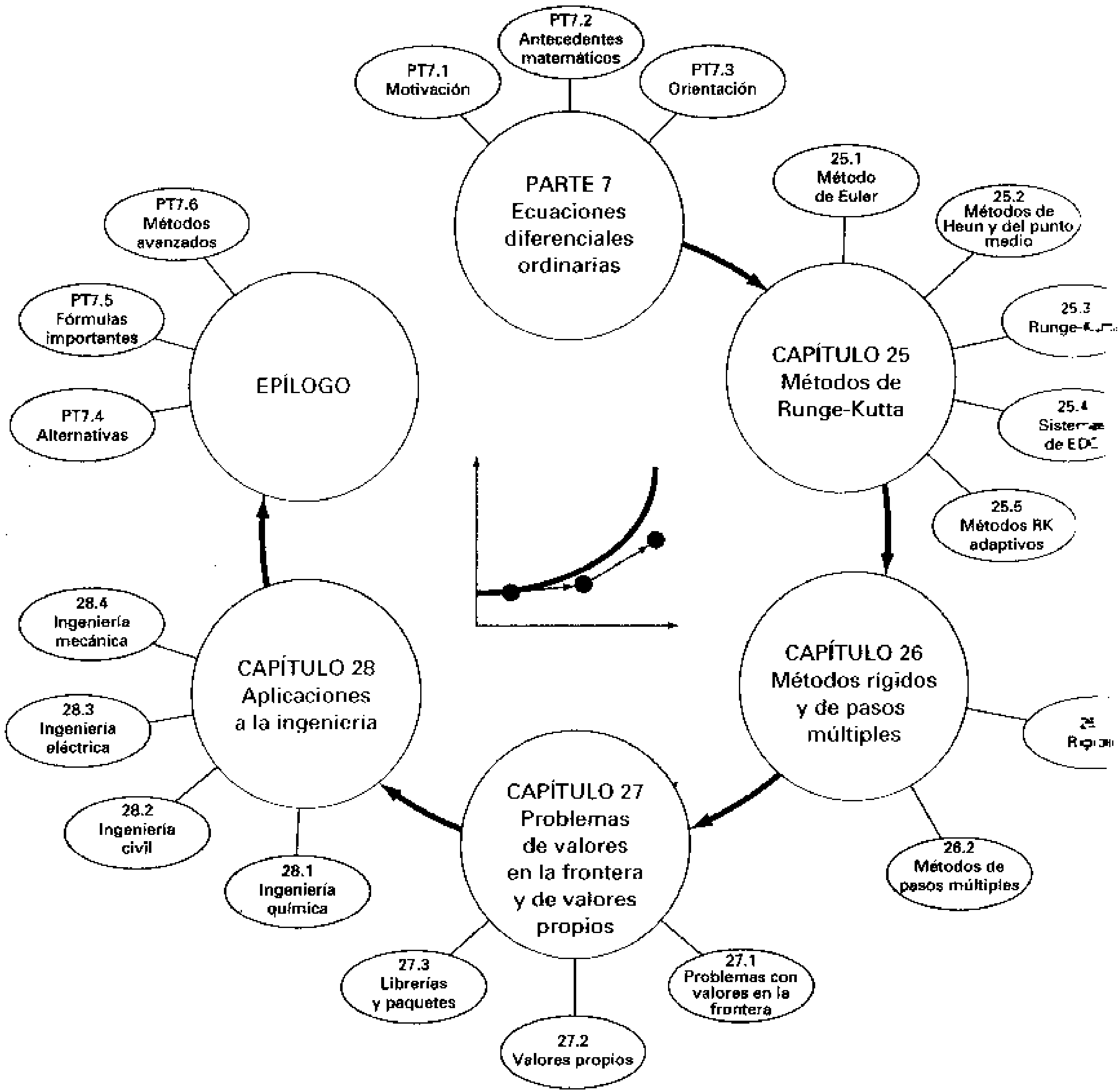
- ... por ejemplo saber que cuando x = 0, y = 1 (condición inicial). Entonces:

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

Solución particular

- En general, una EDO de orden n requiere n condiciones:
  - Si todas se fijan en el mismo punto (p. ej. x = 0) es un **problema de valores iniciales**
  - Si se fijan en distintos puntos, es un **problema de contorno**

Orientación



Métodos de Runge-Kutta

- Solución de EDOs de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

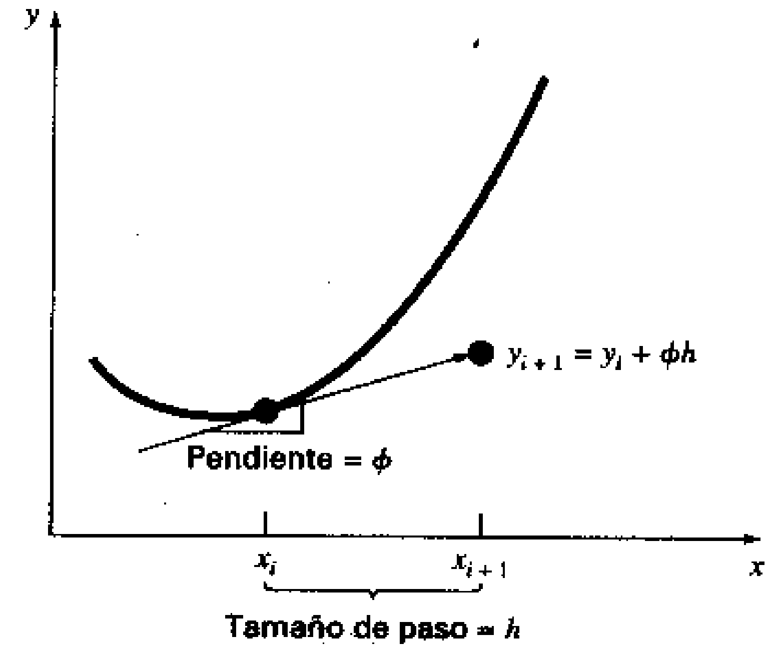
- El problema del paracidista se resolvió como

Nuevo valor = valor anterior + pendiente x paso

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

$$\phi = \frac{dy}{dx}$$

.... donde??



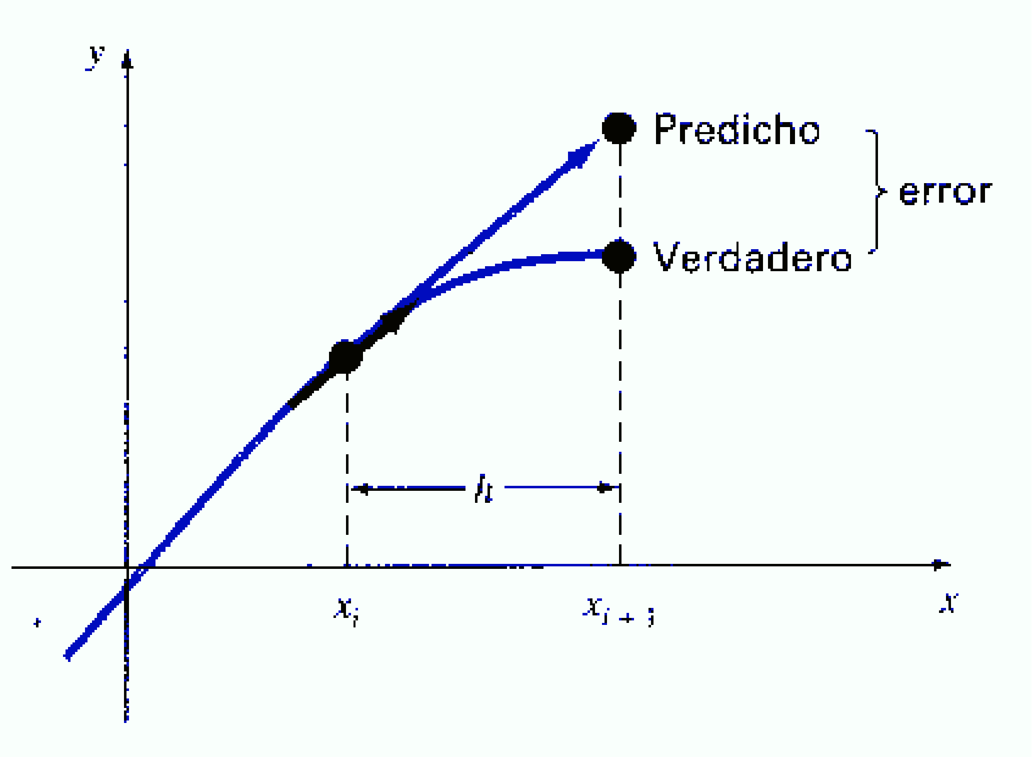
Método de Euler

- La pendiente se estima como:

$$\phi = f(x_i, y_i)$$

- Por lo tanto,

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\,h$$



Ejemplo 25.1 pag. 720

- Resolver, para x entre 0 y 4 con h = 0.5,

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5 \quad , \quad y(0) = 1$$

- solución exacta: $y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$

- Solución. En el primer paso,

$$y(0.5) = y(0) + f(0,1) \times 0.5 = 1.0 + 8.5 \times 0.5 = 5.25$$

- La solución verdadera es

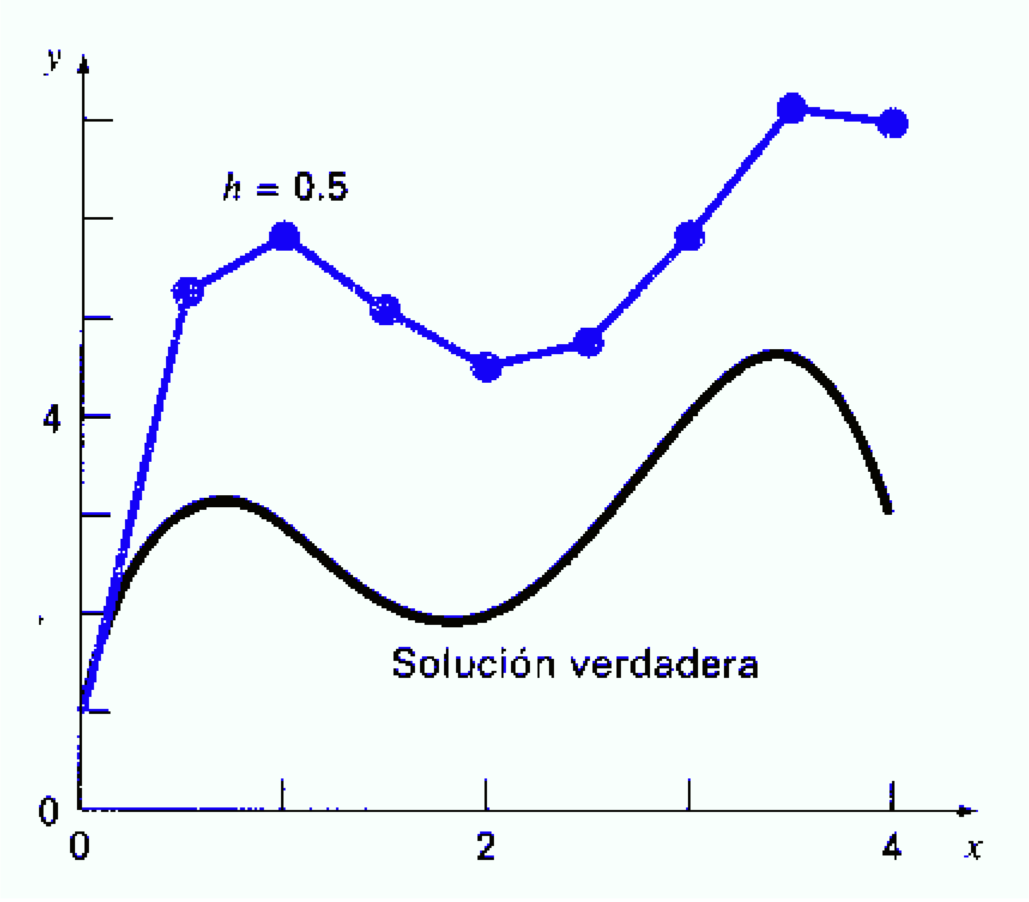
$$y(0.5) = -0.5 \times 0.5^4 + 4 \times 0.5^3 - 10 \times 0.5^2 + 8.5 \times 0.5 + 1 = 3.21875$$

- El error $E_t = 3.21875 - 5.25 = -2.03125$

$$\varepsilon_t = -63.1\,\%$$

Ejemplo 25.1 pag. 720

- Solución completa: 25_1.ods



Análisis del error en el método de Euler

- Errores de
  - Truncamiento
    - Local
    - Global
  - Redondeo
- Serie de Taylor

$$y_{i+1} = y_i + y'_i h + \frac{y''_i}{2!} h^2 + \frac{y_i^{III}}{3!} h^3 + \ldots + \frac{y_i^{(n)}}{n!} h^n + R_n$$

- Es decir

$$y_{i+1} = \underbrace{y_i + f(x_i, y_i) h}_{Euler} + \underbrace{\frac{f'(x_i, y_i)}{2!} h^2 + \ldots}_{error} \Rightarrow E_a = O(h^2)$$

Error local

Ejemplo 25.2

- Calcular el error del método de Euler en el primer paso del ejemplo 25.1
- Solución $$E_t = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!} h^2 + \frac{f''(x_i, y_i)}{3!} h^3 + \frac{f^{III}(x_i, y_i)}{4!} h^4$$
- donde

$$f'(x_i, y_i) = -6x^2 + 24x - 20 \quad \Rightarrow \quad f'(0,1) = -20$$

$$f''(x_i, y_i) = -12x + 24 \quad \Rightarrow \quad f''(0,1) = 24$$

$$f^{III}(x_i, y_i) = -12$$

- luego

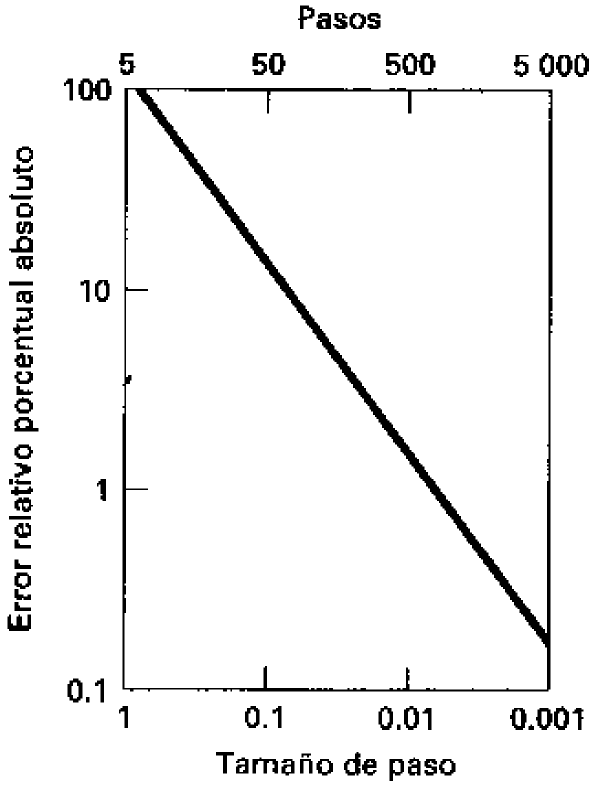
$$E_t = -\frac{20}{2} 0.5^2 + \frac{24}{6} 0.5^3 - \frac{12}{24} 0.5^4 = -2.5 + 0.5 - 0.03125 = -2.03125$$

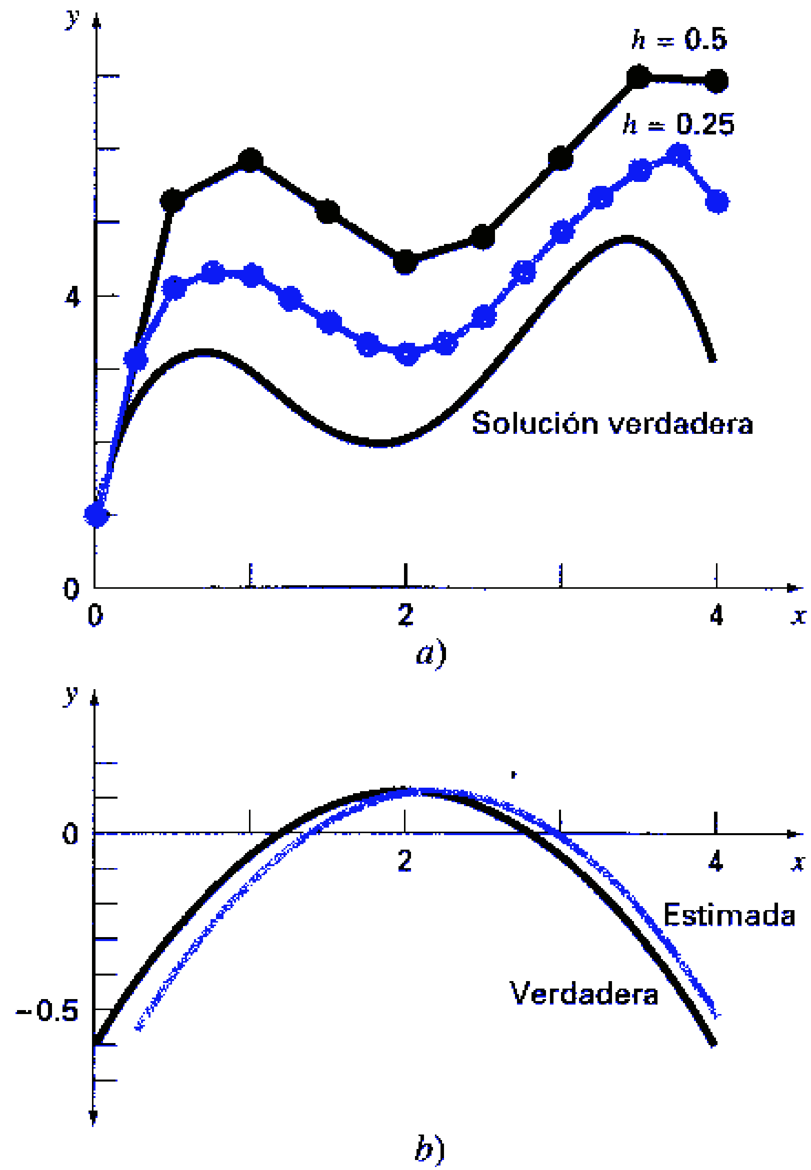
Análisis del error en el método de Euler

- Error local $O(h^2)$ --> error global $O(h)$
- El error se reduce reduciendo h
- El método es exacto para y lineal ($f' = 0$)

Ejemplo 25.3

- Repita el ejemplo 25.1 con h = 0.25
- Solución: 25_3.ods





Algoritmo del método de Euler

- Código en Octave: euler.m

Ejemplo 25.4

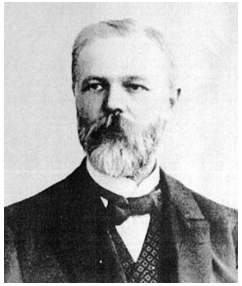
- Resolver el problema del paracaidista

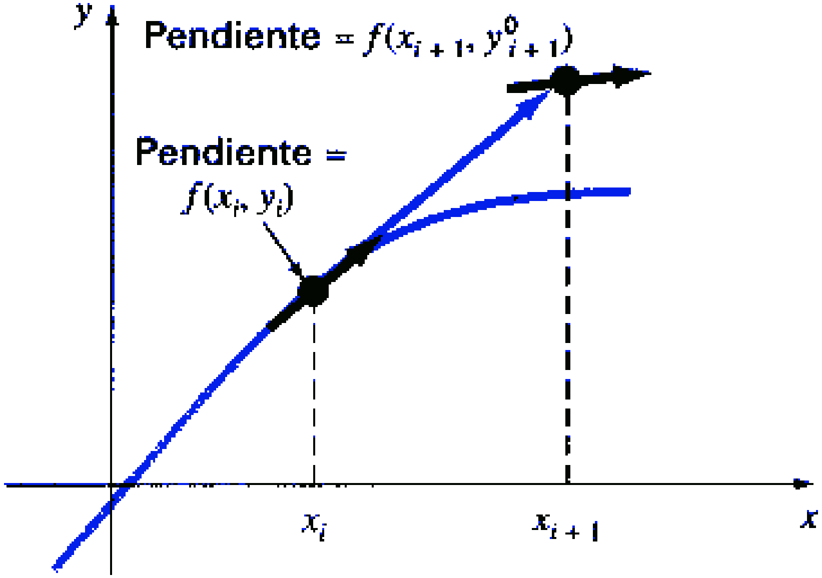
$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} v(t)$$ **lineal**

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}\left[v + a\left(\frac{v}{v_{max}}\right)^{b}\right]$$ **No lineal**

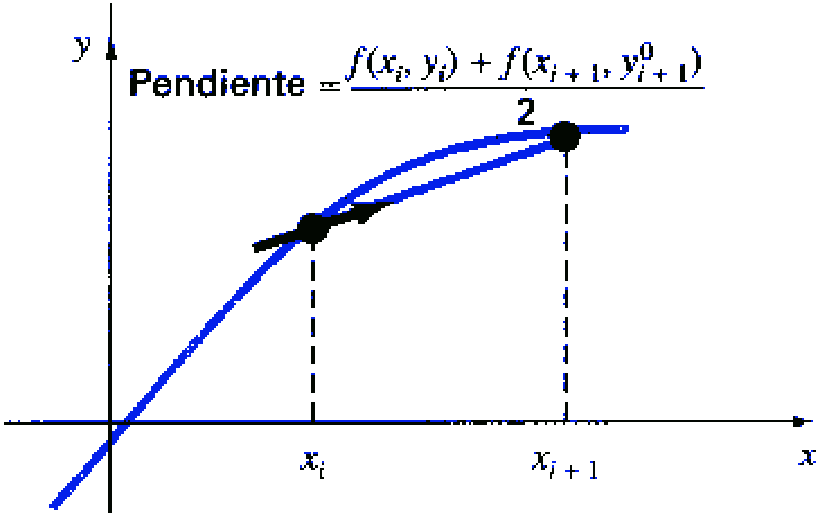
- Datos: m = 68.1 kg ; c = 12.5 kg/s; v = 0 en t = 0
- Donde: a = 8.3 , b = 2.2 y v_{max} = 46 son constantes empíricas
- Código en Octave: p25_4.m

Método de Heun





a)



b)

- Se predice por Euler:

$$y^0_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\,h$$

predictor

- Para estimar

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y^0_{i+1})$$

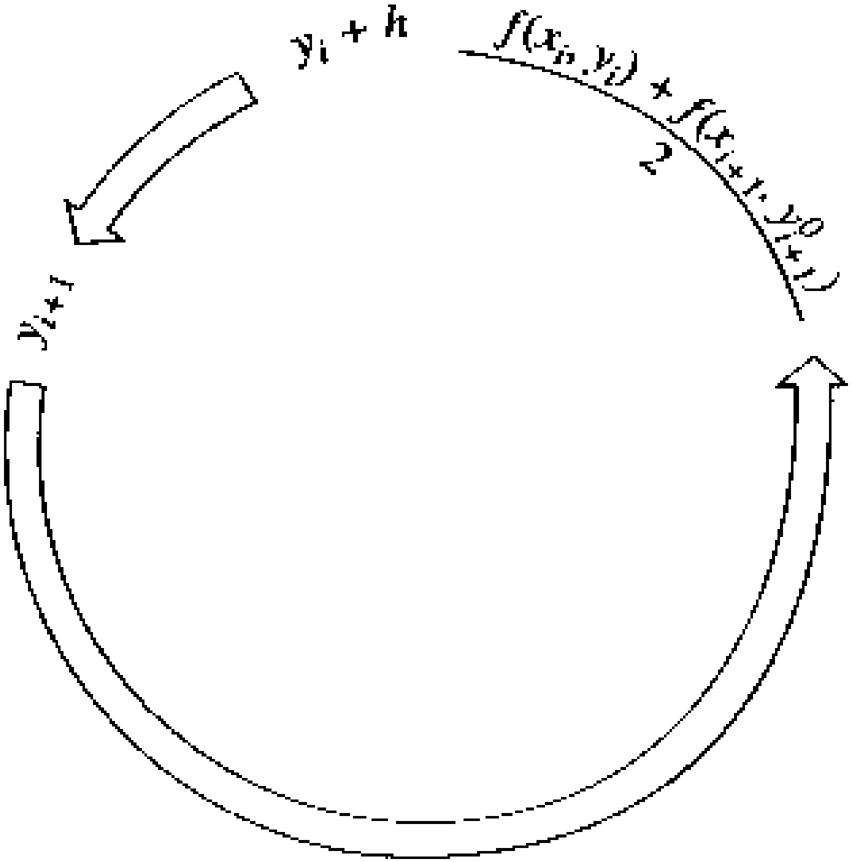
- Que sirve para calcular

$$y_{i+1} = y_i + \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2}\,h$$

corrector

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^0_{i+1})}{2}\,h$$

Método de Heun



- Se puede plantear el esquema predictor – corrector en forma iterativa, hasta que

$$|\varepsilon_t| = \left| \frac{y_{i+1}^{j} - y_{i+1}^{j-1}}{y_{i+1}^{j}} \right| 100\% < \varepsilon_s$$

Ejemplo 25.5

- Resolver, con h = 1

$$y' = 4e^{0.8x} - 0.5y \quad , \quad 0 \leq x \leq 4 \quad , \quad y(0) = 2$$

- Solución analítica:

$$y = \frac{4}{1.3}\left(e^{0.8x} - e^{-0.5x}\right) + 2e^{-0.5x}$$

- Primer paso:

$$y'(0) = 4e^{0} - 0.5 \times 2 = 3$$

predictor

$$y_1^0 = 2 + 3 \times 1 = 5$$

$$y'_1 = f\left(x_{1,} y_1^0\right) = 4e^{0.8 \times 1} - 0.5 \times 5 = 6.402164$$

corrector

$$y_1 = 2 + \frac{3 + 6.402164}{2} \times 1 = 6.701082$$

- Solución completa: 25_5.ods

Error del método de Heun

- Supongamos que y' = f(x,y) = f(x) entonces

$$y_{i+1} = y_i + \underbrace{\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h}_{regla \;\; del \;\; trapecio}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \;\Rightarrow\; \int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \;\Rightarrow\; y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

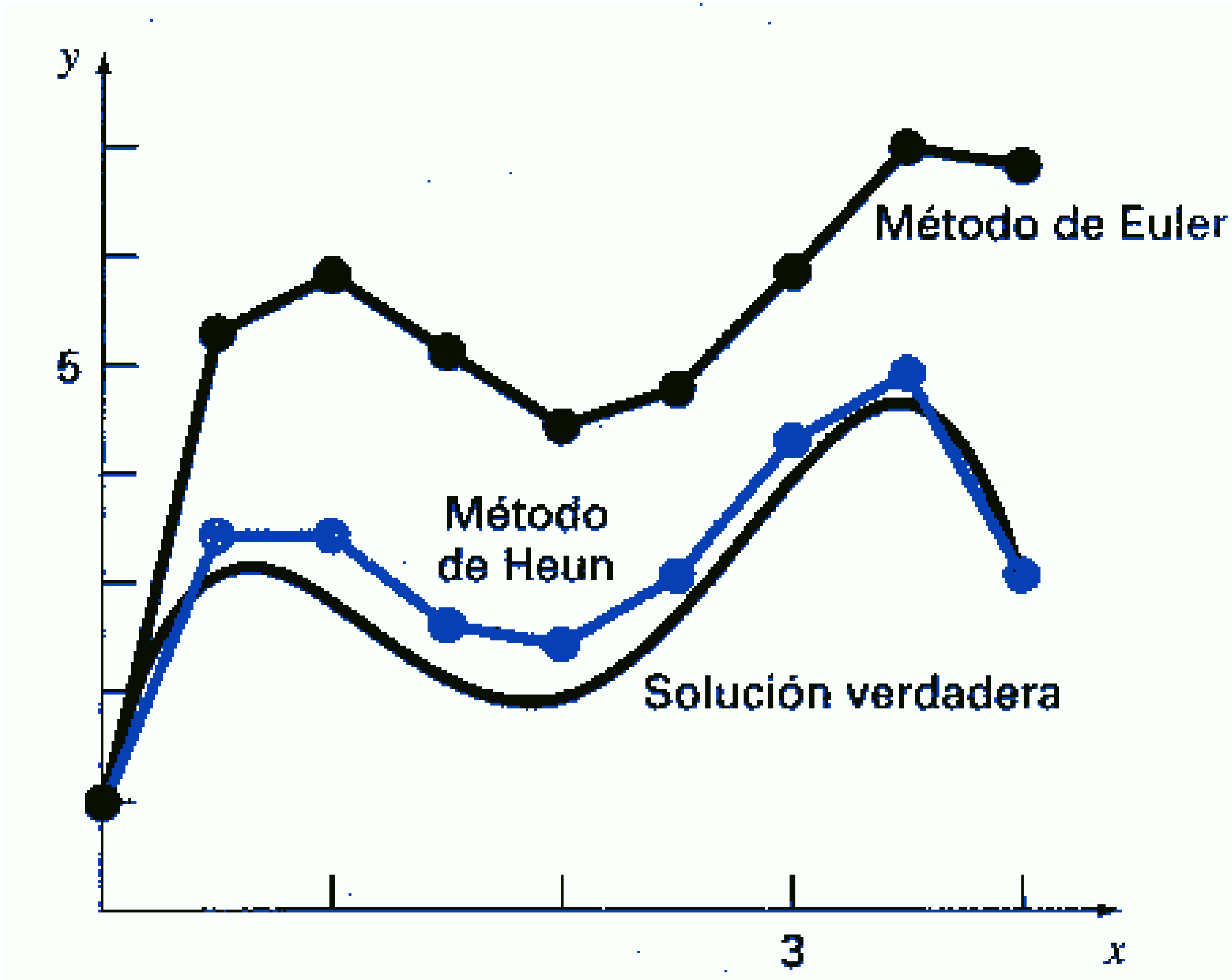
Por la regla del trapecio,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h - \frac{f''(\xi)}{12} h^3$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h + O(h^3)$$ **Error local**

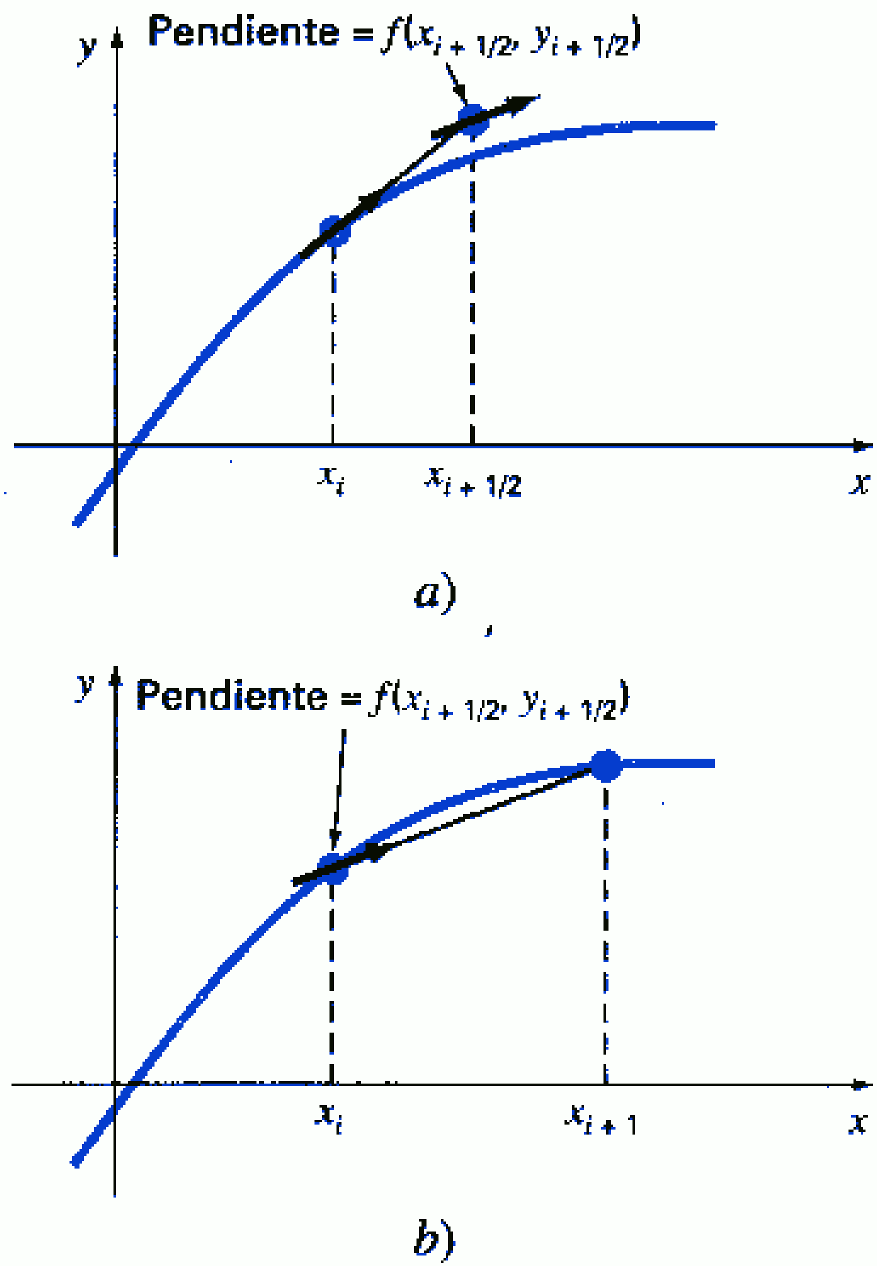
--> error global O(h^2)

Error del método de Heun



Solución de $$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

Método del punto medio



- Se calcula

$$y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i)\frac{h}{2}$$

$$y'_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})\,h$$

- Se basa en la fórmula de integración del punto medio:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = h\,f(x_{i+1/2})$$

Error local: $O(h^3)$
Error global: $O(h^2)$

Algoritmos de los métodos de Heun y del punto medio

- Se resuelve el problema

$$y' = -2x - y \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

- Códigos en Octave:
  - heun.m
  - puntomedio.m

Métodos de Runge - Kutta

- Forma general $$y_{i+1} = y_i + \underbrace{\phi(x_i, y_i, h)}_{\textit{funcion incremento}} h$$

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_n k_n$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

$$\ldots$$

$$k_n = f\left(x_i + p_{n-1} h, y_i + \sum_{j=1}^{n-1} q_{n-1,j} k_j h\right)$$

Métodos de Runge – Kutta de segundo orden

- Forma general

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2) h$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

- De la serie de Taylor, $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!} h^2$

$$f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

Regla de la cadena

- reemplazando, $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right) \frac{h^2}{2!}$
- De la serie de Taylor, $g(x + r, y + s) = g(x, y) + r \frac{\partial g}{\partial x} + s \frac{\partial g}{\partial y} + \ldots$

Métodos de Runge – Kutta de segundo orden

- Se tiene,

$$f(x_i+p_1h,\, y_i+q_{11}k_1h)=f(x_i,y_i)+p_1h\frac{\partial f}{\partial x}+q_{11}k_1h\frac{\partial f}{\partial y}+O(h^2)$$

- reemplazando,

$$y_{i+1}=y_i+a_1h\,f(x_i,y_i)+a_2p_1h^2\frac{\partial f}{\partial x}+a_2q_{11}h^2f(x_i,y_i)\frac{\partial f}{\partial y}+O(h^3)$$

- reordenando,

$$y_{i+1}=y_i+(a_1+a_2)f(x_i,y_i)\,h+\left[a_2p_1\frac{\partial f}{\partial x}+a_2q_{11}f(x_i,y_i)\frac{\partial f}{\partial y}\right]h^2+O(h^3)$$

- comparando, $(a_1+a_2)=1 \;\;,\;\; a_2p_1=\frac{1}{2} \;\;,\;\; a_2q_{11}=\frac{1}{2}$

- Es decir $a_1=1-a_2 \;\;,\;\; p_1=q_{11}=\frac{1}{2a_2}$

Métodos de Runge – Kutta de segundo orden

- Si $a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow p_1 = q_{11} = 1$

se tiene $y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2 \right) h$

con $k_1 = f(x_i, y_i)$, $k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$ **Método de Heun**

- Si $a_2 = 1 \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow p_1 = q_{11} = \frac{1}{2}$

se tiene $y_{i+1} = y_i + k_2 h$

con $k_1 = f(x_i, y_i)$, $k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2} h, y_i + \frac{1}{2} k_1 h\right)$ **Método del punto medio**

Método de Ralston

- Si a_2 = 2/3, se minimiza el error de truncamiento.
- Si $a_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow p_1 = q_{11} = \frac{3}{4}$

se tiene $y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3} k_1 + \frac{2}{3} k_2 \right) h$

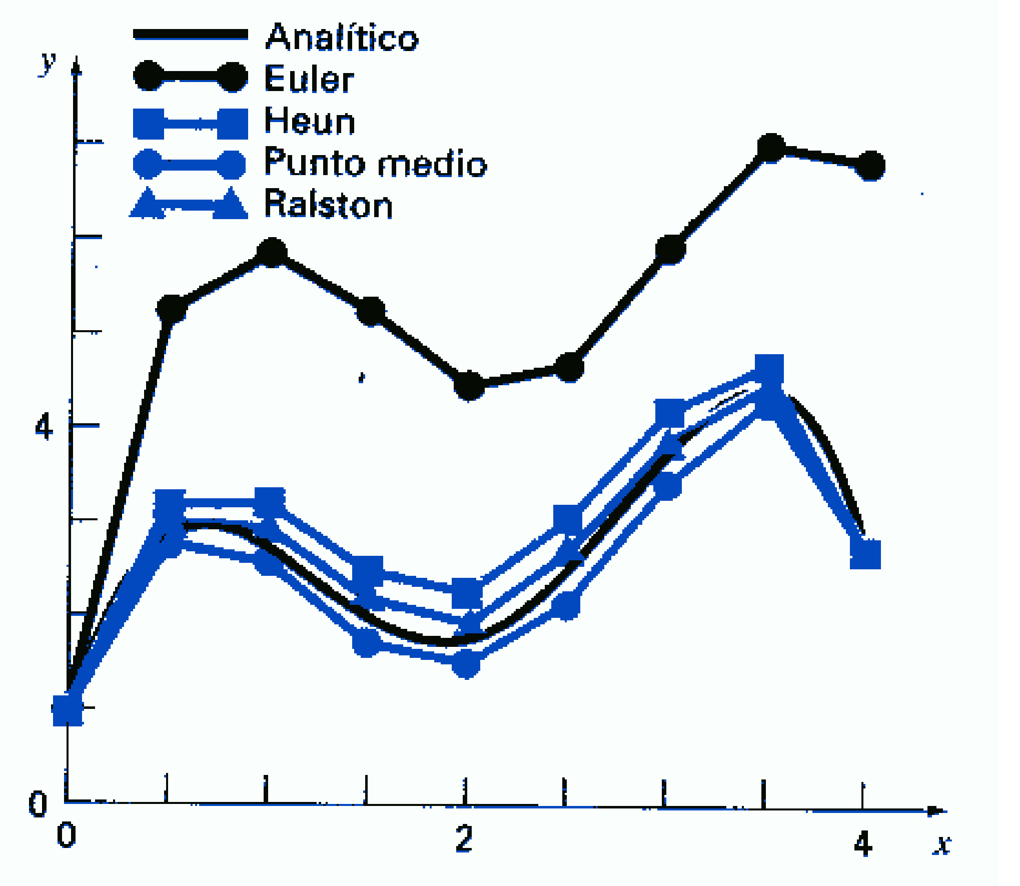
$$k_1 = f(x_i, y_i) \ , \ k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4} h, y_i + \frac{3}{4} k_1 h\right)$$ **Método de Ralston**

Ejemplo 25.6 pag. 744

- Comparación de varios esquemas de RK de segundo orden

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5 \quad , \quad y(0) = 1$$

- Solución en 25_6.ods



Métodos de Runge-Kutta de tercer orden

- Una versión común es

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right)h$$

- donde $k_1 = f\left(x_i, y_i\right)$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h\right)$$

- Si f = f(x) se transforma en la Regla 1/3 de Simpson --> error local $O(h^4)$ y error global $O(h^3)$

Métodos de Runge-Kutta de cuarto orden

- Una versión común es

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)h$$

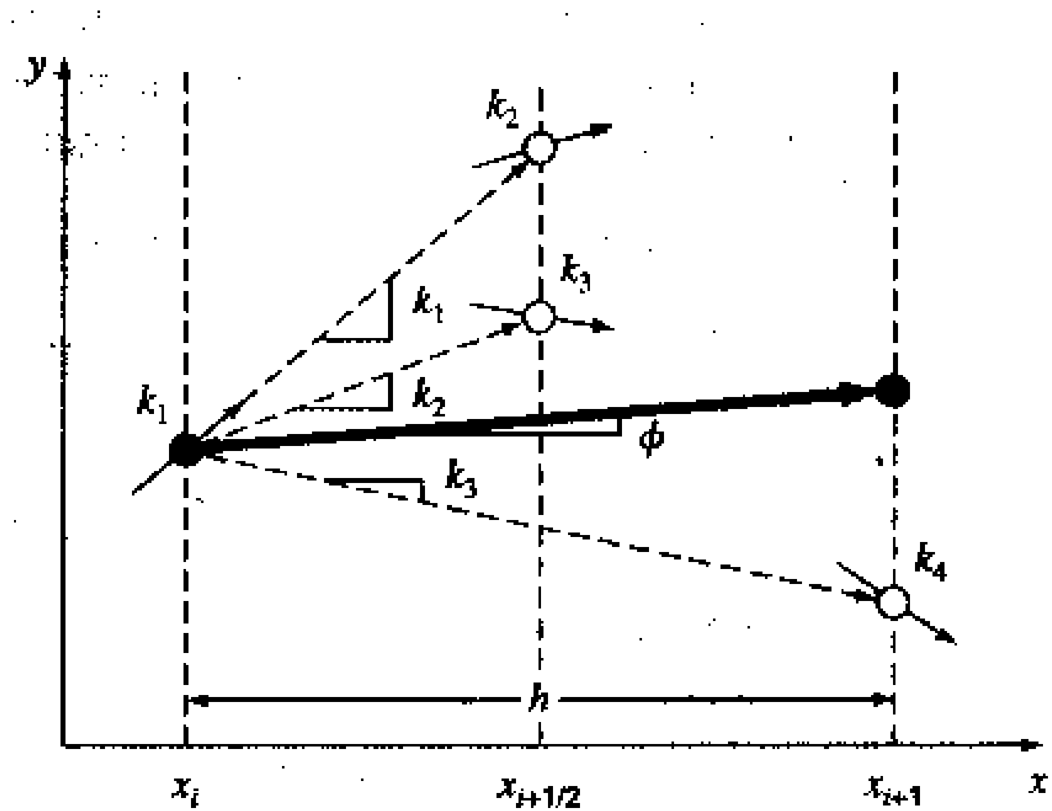
- donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$



Ejemplo 25.7 pag. 747

- Resolver, con h = 0.5

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5 \quad , \quad y(0) = 1$$

- Se calculan (...):

$$k_1 = 8.5 \quad , \quad k_2 = 4.21875 \quad , \quad k_3 = 4.21875 \quad , \quad k_4 = 1.25$$

- reemplazando:

$$y(0.5) = 1 + \frac{1}{6}\left(8.5 + 2\times 4.21875 + 2\times 4.21875 + 1.25\right)0.5 = 3.21875$$

Solución exacta

Ejemplo 25.7 pag. 747

- Resolver, con h = 0.5

$$y' = 4e^{0.8x} - 0.5y \quad , \quad 0 \le x \le 0.5 \quad , \quad y(0) = 2$$

- Solución.

$$k_1 = f(0,2) = 4e^{0.8\times 0} - 0.5\times 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad y(0.25) = 2 + 3\times 0.25 = 2.75$$

$$k_2 = f(0.25,2.75) = 4e^{0.8\times 0.25} - 0.5\times 2.75 = 3.510611$$

$$y(0.25) = 2 + 3.510611\times 0.25 = 2.877653$$

$$k_3 = f(0.25,2.877653) = 4e^{0.8\times 0.25} - 0.5\times 2.877653 = 3.446785$$

$$y(0.5) = 2 + 3.446785\times 0.5 = 3.723392$$

$$k_4 = f(0.5,3.723392) = 4e^{0.8\times 0.5} - 0.5\times 3.723392 = 4.105603$$

$$\phi = \frac{1}{6}\left[3 + 2\times 3.510611 + 2\times 3.446785 + 4.105603\right] = 3.503399$$

$$y(0.5) = 2 + 3.503399\times 0.5 = 3.751669$$

Exacta : 3.751521

Métodos de Runge-Kutta de orden superior

- Método RK de quinto orden de Butcher:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90}\left(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6\right)h$$

- con $k_1 = f(x_i, y_i)$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{4}h,\ y_i + \frac{1}{4}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{4}h,\ y_i + \frac{1}{8}k_1 h + \frac{1}{8}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i - \frac{1}{2}k_2 h + k_3 h\right)$$

$$k_5 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h,\ y_i + \frac{3}{16}k_1 h + \frac{9}{16}k_4 h\right)$$

$$k_6 = f\left(x_i + h,\ y_i - \frac{3}{7}k_1 h + \frac{2}{7}k_2 h + \frac{12}{7}k_3 h - \frac{12}{7}k_4 h + \frac{8}{7}k_5 h\right)$$

Algoritmo de los métodos de Runge-Kutta

- Código en Octave para el método de RK de 4to orden
- rk4.m

Sistemas de ecuaciones

$$\frac{d\,y_1}{d\,x} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$\frac{d\,y_2}{d\,x} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$\ldots$$

$$\frac{d\,y_n}{d\,x} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

- Requiere n condiciones iniciales en x_0

Ejemplo 25.9, pag. 752

- Resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{d\,y_1}{d\,x} = -0.5\,y_1 \quad ; \quad \frac{d\,y_2}{d\,x} = 4 - 0.3\,y_2 - 0.1\,y_1$$

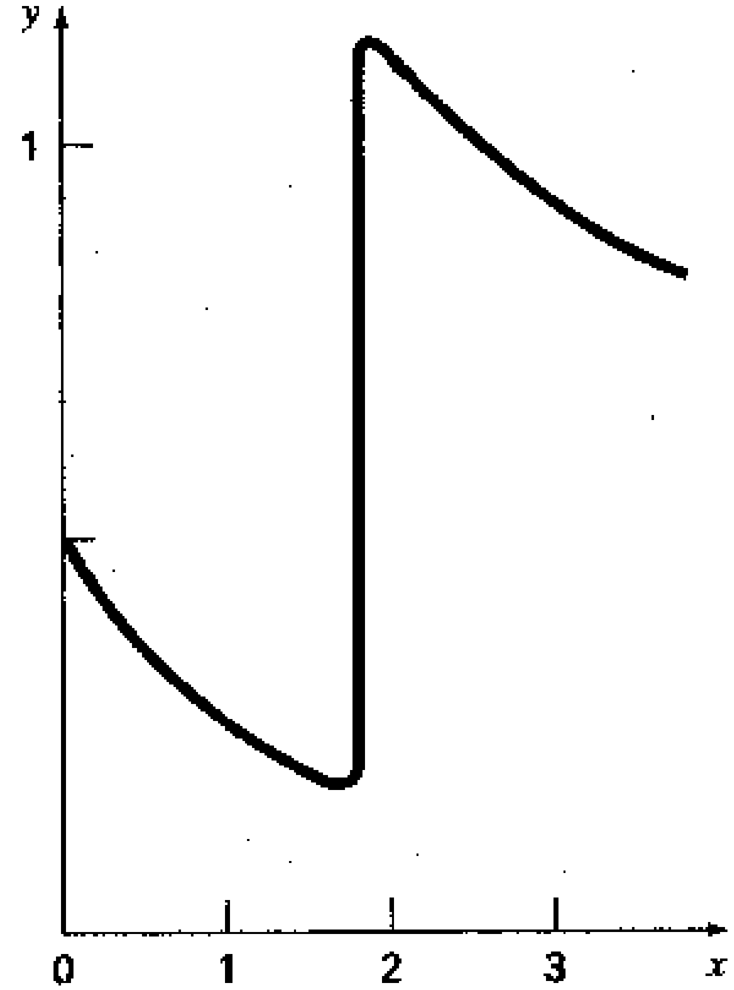
- Por el método de Euler, con h = 0.5, sabiendo que en x = 0, y_1 = 4 y y_2 = 6.
- Solución en planilla de cálculo: 25_9.ods

Ejemplo 25.10 pag. 752

- Resolver por el método de Runge-Kutta de 4to orden el problema anterior.
- Solución en planilla de cálculo: 25_10.ods

Métodos adaptativos

- Los métodos de paso constante pueden ser ineficientes
- Se puede “adaptar” el paso estimando el error de truncamiento local en cada paso.
- También se pueden aplicar al cálculo de integrales



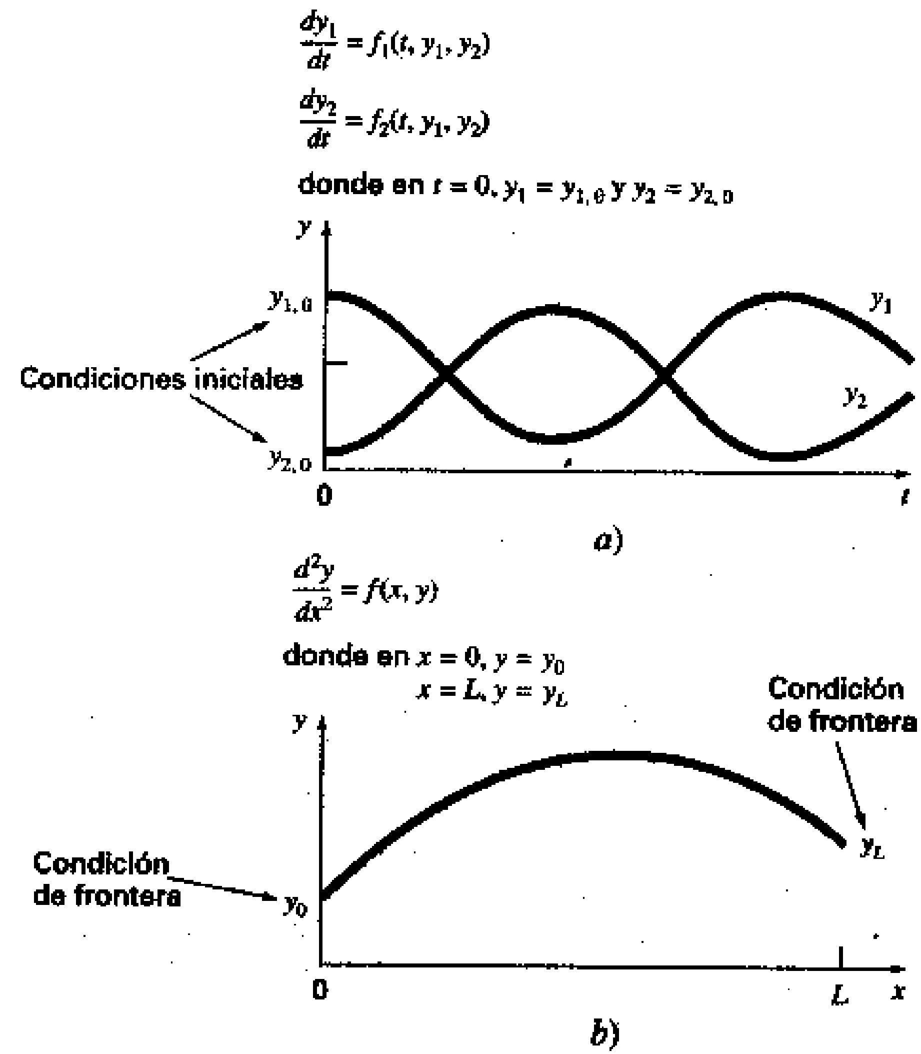
Método adaptativo de RK o de mitad de paso

- Cada paso se calcula dos veces:
  - De un solo paso h, obteniendo y_1.
  - En dos pasos h/2, obteniendo y_2.
- El error Δ se representa por: $\Delta = y_2 - y_1$
- Se realiza la corrección $y_2 = y_2 + \Delta/15$
  - Exactitud de quinto orden

Problemas 25.1 a 25.26, pag. 764

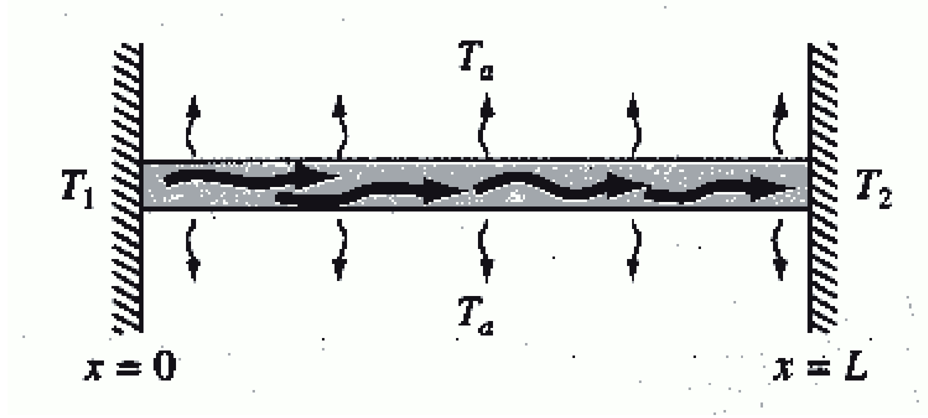
Problemas de valores en la frontera (problemas de contorno) y de valores propios

- Problemas de EDOs:
  - Problemas de valores iniciales
  - Problemas de contorno
    - Valores propios, autovalores o eigenvalores



Ejemplo

- Distribución de temperaturas en una barra uniforme no aislada



$$\frac{d^2 T}{d x^2} + h'(T_a - T) = 0$$

- Condiciones de contorno

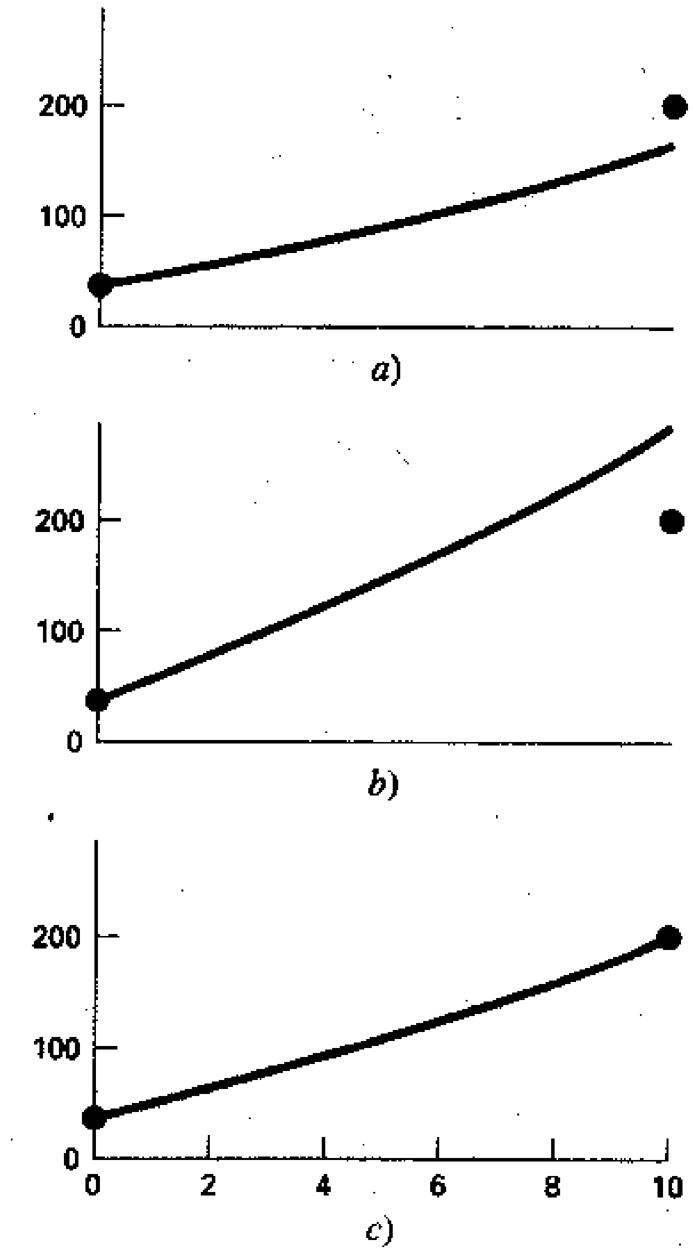
$$T(0) = T_1$$
$$T(L) = T_2$$

- Si L = 10 m, T_a = 20 °C, T_1 = 40 °C, T_2 = 200 °C y h' = 0.01 m^{-2}, la solución analítica es:

$$T = 73.4523\, e^{0.1x} - 53.4523\, e^{-0.1x} + 20$$

El método del disparo

- Consiste en convertir el problema de contorno en un problema de valores iniciales.
- Se realizan dos estimaciones y luego una interpolación.



Ejemplo 27.1

- Resolver $\dfrac{d^2 T}{d x^2} + h'(T_a - T) = 0$ con $\begin{matrix} T(0) = 40 \\ T(10) = 200 \end{matrix}$

  se transforma en un sistema de EDOs de primer orden:

$$\frac{dT}{dx} = z \quad , \quad \frac{dz}{dx} = h'(T - T_0)$$

Suponemos un valor inicial para z, z(0) = 10

Aplicando RK4 con h = 2, (27_1.ods) se obtiene T(10) = 168.3797

Suponemos z(0) = 20, y con lo que se obtiene (27_1.ods) T(10) = 285.8980

Ejemplo 27.1

- Como la EDO es lineal, se interpola linealmente el valor de z(0) para obtener T(10) = 200:

$$z(0) = \frac{200 - 168.3797}{285.8980 - 168.3797} 20 + \frac{200 - 285.8980}{168.3797 - 285.8980} 10$$

$$z(0) = 12.6907$$

- Con este valor se resuelve el sistema de EDOs de primer orden para determinar T a lo largo de la barra

Problemas no lineales

- Se reformula como un problema de raíces, considerando que

$$T_{10} = f(z_0)$$

- Se busca la raíz de

$$g(z_0) = f(z_0) - 200$$

Ejemplo 27.2

- Suponer la siguiente EDO no lineal para la barra calentada, con h'' = 5 x 10^{-8}:

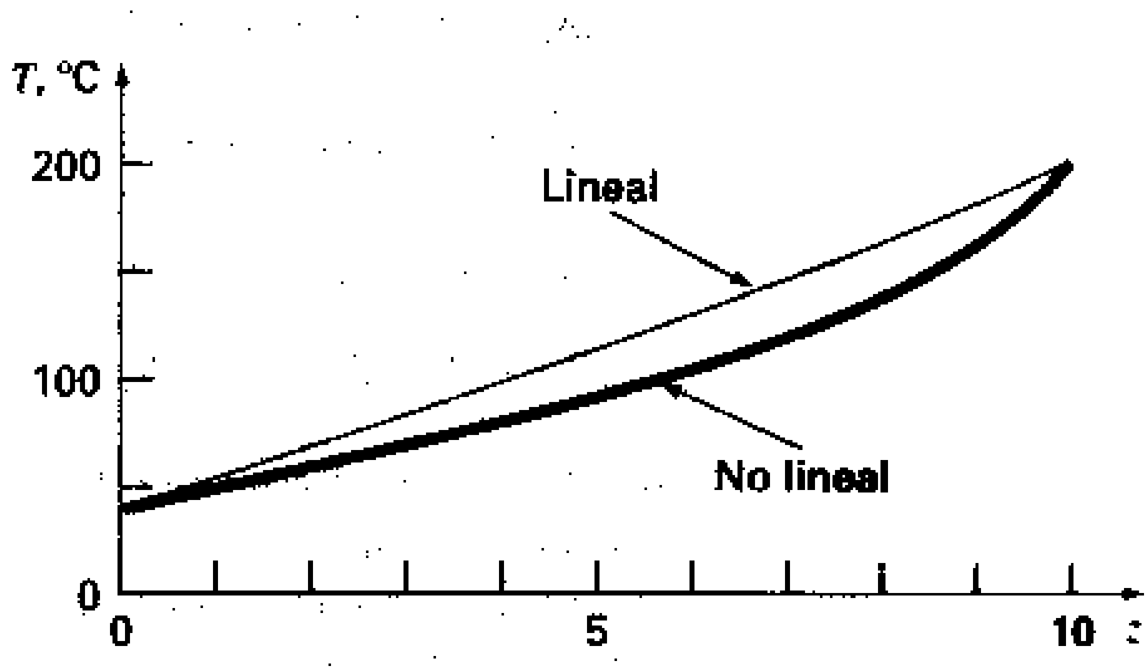
$$\frac{d^2T}{dx^2} + h''(T_a - T)^4 = 0$$

- Se reduce a un sistema de EDOs de 1er orden:

$$\frac{dT}{dx} = z \quad , \quad \frac{dz}{dx} = h'(T - T_0)^4$$

- Solución en: 27_2.ods

Ejemplo 27.2



Método de diferencias finitas*

- Se sustituyen las derivadas por diferencias finitas divididas
- La EDO se transforma en un sistema de ecuaciones algebraicas
  - Lineales, si la EDO es lineal
  - No lineales, si la EDO es no lineal
- Para resolverlo se aplican los métodos de la parte 3

Ejemplo 27.3

- Resolver por diferencias finitas, el problema de la transmisión de calor en la barra
- Se sustituyen las derivadas:

$$\frac{d^2 T}{d x^2} + h'(T_a - T) = 0 \Rightarrow \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} - h'(T_i - T_a) = 0$$

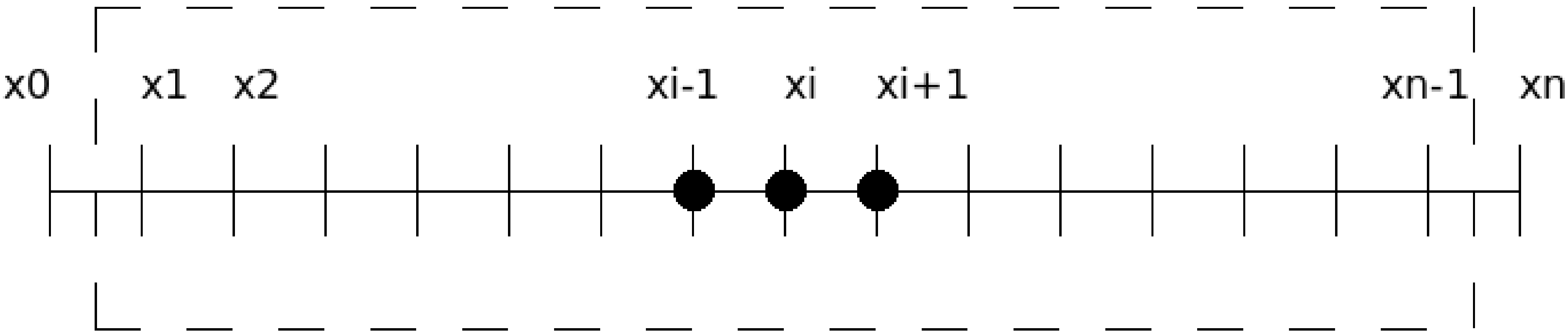
- reordenando:

$$-T_{i-1} + (2 + h' \Delta x^2) T_i - T_{i+1} = h' \Delta x^2 T_a$$

Ecuación sustituta o molécula de cálculo

Ejemplo 27.3

- Se aplica la molécula de cálculo a cada nodo:



- Se genera un sistema de n-1 ecuaciones:
  - Cada una con 3 incógnitas,
  - Excepto la primera y la última con 2 incógnitas

Ejemplo 27.3

- Eligiendo Δx = 2, se tiene:
  - Nodo 1: $2.04\,T_1 - T_2 = 0.01\,x\,2\,x\,40 + 40 = 40.8$
  - Nodo 2: $-T_1 + 2.04\,T_2 - T_3 = 0.8$
  - Nodo 3: $-T_2 + 2.04\,T_3 - T_4 = 0.8$
  - Nodo 4: $-T_3 + 2.04\,T_4 = 0.8 + 200 = 200.8$
- En forma matricial

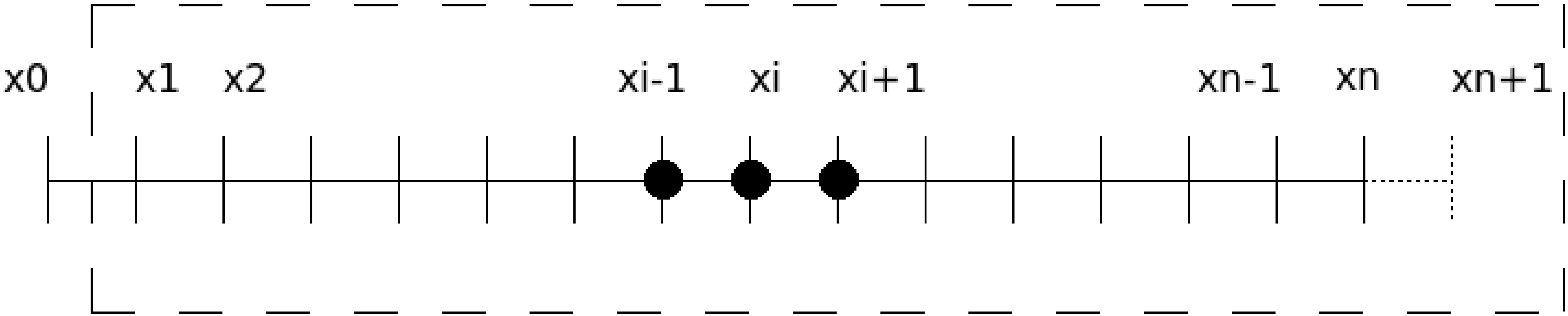
$$\begin{bmatrix} 2.04 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2.04 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2.04 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2.04 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 40.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \\ 200.8 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo 27.3

- Sistema tridiagonal → algoritmo de Thomas
- Solución $\left\{T\right\}^{T} = \left[\begin{matrix} 65.9698 & 93.7785 & 124.5382 & 159.4795 \end{matrix}\right\}$
- Algoritmo en Octave: diferencias.m

Condiciones de borde en la derivada*

- Resolver $y''-2y'+y=x$
- Para $0.0 \leq x \leq 1.0$
- Con $h=0.1 \;\; , \;\; y(0.0)=-1, y'(1.0)=1$
- Ahora hay n+1 incógnitas (incluido y_{n+1}):



Condiciones de borde en la derivada*

- La condición de borde en 1.0 se iguala a una diferencia finita dividida centrada:

$$y'(1.0) = y'_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = 1$$

- La (n+1)-ésima ecuación surge de la anterior :

$$y_{n+1} - y_{n-1} = 2h$$

Problemas de valores propios

- El sistema $[A]\{X\}=\{B\}$ tiene solución única si det(A) ≠ 0
- El sistema $[A]\{X\}=0$ tiene solución única trivial si det(A) ≠ 0, y soluciones no triviales (∞) si det(A) = 0
- Los problemas de valores propios son de la forma:

$$(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0$$
$$a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0$$

Problemas de valores propios

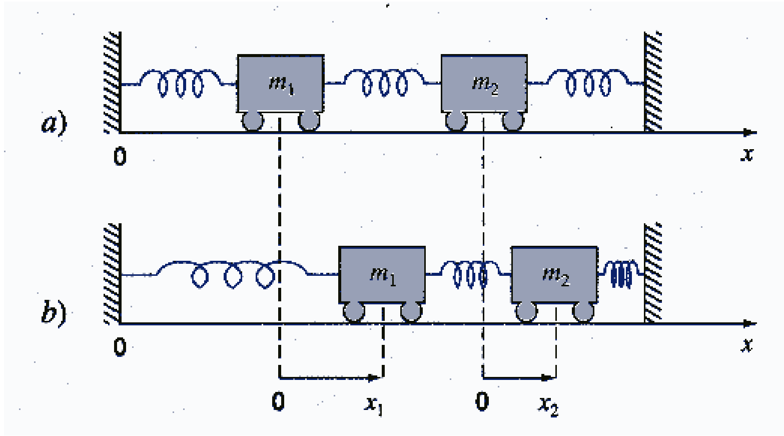
- O más brevemente, $\left[[A]-\lambda[I]\right]\{X\}=0$
- Los valores λ que hacen $det\left[[A]-\lambda[I]\right]=0$

  se denominan valores propios del sistema, y su solución vector propio

Ejemplo: oscilación masa-resorte

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{d t^2} = -k_1 x + k(x_2 - x_1)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{d t^2} = -k(x_2 - x_1) - k x_2$$

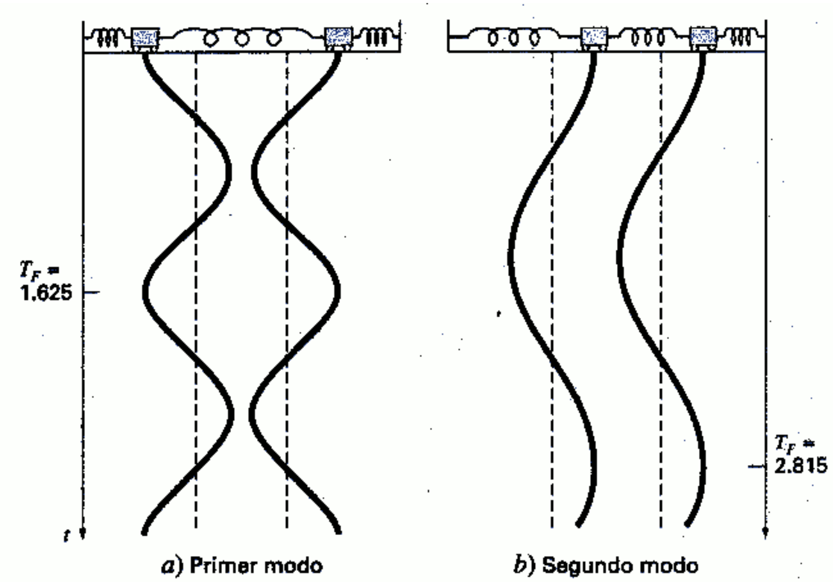


- Sabiendo que $x_i = A_i \sin \omega t$

$$x''_i = -A_i \omega^2 \sin \omega t$$

- Se llega a

$$\begin{bmatrix} \frac{2k}{m_1} - \omega^2 & -\frac{k}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & \frac{2k}{m_2} - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Ejemplo: pandeo

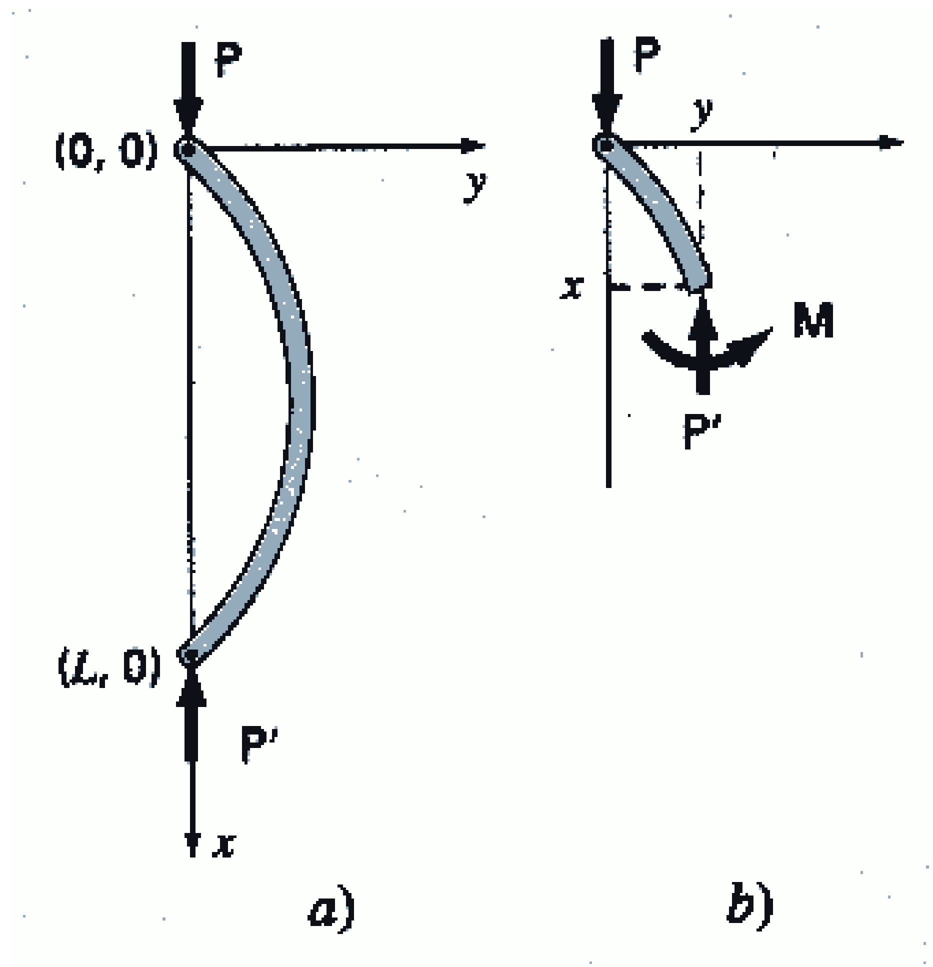
- Deformación de la columna:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{M}{E I}$$

- Donde M = -P.y
- Reemplazando,

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + p^2 y = 0$$

- con $p^2 = \dfrac{P}{E I}$

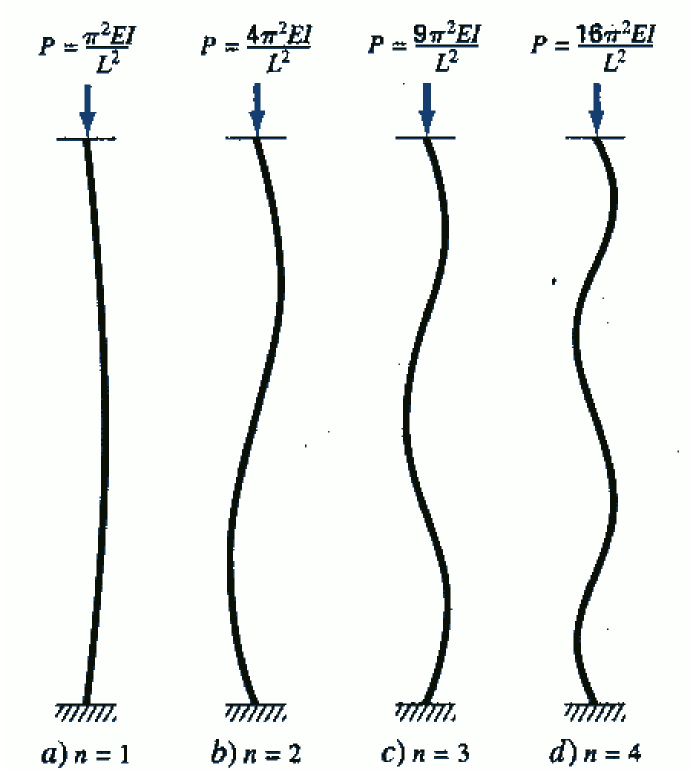


- Para y(0) = y(L) = 0

Ejemplo: pandeo

- Solución analítica: $y = A\sin px + B\cos px$
- Para x = 0, $y = A\sin 0 + B\cos 0 = 0 \Rightarrow B = 0$
- Para x = L, $y = A\sin pL = 0 \Rightarrow pL = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, 3, ...$
- Reemplazando(...),

$$P = \frac{n^2 \pi^2 E I}{L^2}$$



- Si n = 1 (primer modo):

$$P = \frac{\pi^2 E I}{L^2}$$

Fórmula de Euler

Ejemplo: pandeo

- Ej. 27.5
- Datos:
  - $E = 10 \times 10^{9}$ Pa
  - $I = 1.25 \times 10^{-5}$ m^{4}
  - L = 3 m

n	p (m^-2)	P (kN)
1	1,0472	137,078
2	2,0944	548,311
3	3,1416	1233,701
4	4,1888	2193,245
5	5,2360	3426,946
6	6,2832	4934,802
7	7,3304	6716,814
8	8,3776	8772,982

Método del polinomio

- Se reemplaza la EDO por una ecuación en diferencias finitas, se iguala a 0 el determinante de la matriz de coeficientes y se resuelve el polinomio resultante.
- Para el ejemplo anterior, se tiene

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p^2y_i=0$$

- reordenando,

$$y_{i-1}-\left(2-h^2p^2\right)y_i+y_{i+1}=0$$

Método del polinomio

- Con 5 tramos (4 nodos interiores) se tiene:

$$\begin{bmatrix} (2-h^2p^2) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & (2-h^2p^2) & -1 & 0 \\ 0 & -1 & (2-h^2p^2) & -1 \\ 0 & 0 & -1 & (2-h^2p^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = 0$$

Ejemplo 27.6

- Determinar los valores propios del ej. 27.5, con a) 1, b) 2, c) 3, y d) 4 nodos interiores.
- a) h = 3/2

$$-\left(2-2.25\,p^2\right)y_i=0$$

$$det\left(A\right)=2-2.25\,p^2=0$$

$$p=\pm 0.9428 \;\Rightarrow\; \varepsilon_t \approx 10\,\%$$

Ejemplo 27.6

- b) h = 3/3 = 1

$$\begin{bmatrix} 2-p^2 & -1 \\ -1 & 2-p^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$det(A) = \left(2-p^2\right)^2 - 1 = 0$$

$$p = \pm 1 \;\Rightarrow\; \varepsilon_t \approx 4.5\,\%$$

$$p = \pm 1.73205 \;\Rightarrow\; \varepsilon_t \approx 17\,\%$$

Ejemplo 27.6

- c) h = 3/4

$$\begin{bmatrix} 2-0.5625\,p^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2-0.5625\,p^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2-0.5625\,p^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = 0$$

$$det(A) = \left(2-0.5625\,p^2\right)^3 - 2\left(2-0.5625\,p^2\right) = 0$$

$$2-0.5625\,p^2 = 0$$

$$2-0.5625\,p^2 = \sqrt{2}$$

$$p = \pm 1.0205 \;\Rightarrow\; \varepsilon_t \approx 2.5\,\%$$

$$p = \pm 1.8856 \;\Rightarrow\; \varepsilon_t \approx 10\,\%$$

$$p = \pm 2.4637 \;\Rightarrow\; \varepsilon_t \approx 22\,\%$$

Ejemplo 27.6

		Método del polinomio			
Valor propio	**Verdadero**	***h* = 3/2**	***h* = 3/3**	***h* = 3/4**	***h* = 3/5**
1	1.0472	0.9428 (10%)	1.0000 (4.5%)	1.0205 (2.5%)	1.0301 (1.6%)
2	2.0944		1.7321 (21%)	1.8856 (10%)	1.9593 (65%)
3	3.1416			2.4637 (22%)	2.6967 (14%)
4	4.1888				3.1702 (24%)

El método de potencias

- El problema de valores propios se escribe como:

$$[A]\{X\} = \lambda\{X\}$$

- Puesto en forma iterativa:

$$[A]\{X_{k-1}\} = \lambda_k\{X_k\}$$

- El método permite obtener el *mayor* valor propio

Ejemplo 27.7

- Determine el valor propio mayor del punto c) del ejemplo 27.6

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p^2 y_i = 0$$

- Se escribe como:

$$\begin{array}{rrrl}
3.5556x_1 & -1.7778x_2 & & = \lambda x_1 \\
-1.7778x_1 & 3.5556x_2 & -1.7778x_3 & = \lambda x_2 \\
 & -1.7778x_2 & 3.5556x_3 & = \lambda x_3
\end{array}$$

Ejemplo 27.7

- Se asume $\{x_0\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$
- Se reemplaza

$$\begin{array}{rrrl} 3.5556(1) & -1.7778(1) & & = 1.7778 \\ -1.7778(1) & 3.5556(1) & -1.7778(1) & = 0 \\ & -1.7778(1) & 3.5556(1) & = 1.7778 \end{array}$$

- Se normaliza el vector de la derecha y se obtiene la primera estimación de λ:

$$\begin{Bmatrix} 1.7778 \\ 0 \\ 1.7778 \end{Bmatrix} = 1.7778 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1.7778$$

Ejemplo 27.7

- Ahora se reemplaza $[1\ 0\ 1]^T$ en el lado izquierdo:

$$\begin{array}{lllll} 3.5556(1) & -1.7778(0) & & = & 3.5556 \\ -1.7778(1) & 3.5556(0) & -1.7778(1) & = & -3.5556 \\ & -1.7778(0) & 3.5556(1) & = & 3.5556 \end{array}$$

- Normalizando,

$$\begin{Bmatrix} 3.5556 \\ -3.5556 \\ 3.5556 \end{Bmatrix} = 3.5556 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \lambda_2 = 3.5556$$

- El error relativo es, $|\varepsilon_a| = \left| \dfrac{3.5556 - 1.7778}{3.5556} \right| 100\,\% = 50\,\%$

Ejemplo 27.7

- Tercera iteración

$$\begin{bmatrix} 3.5556 & -1.7778 & 0 \\ -1.7778 & 3.5556 & -1.7778 \\ 0 & -1.7778 & 3.5556 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.334 \\ -7.112 \\ 5.334 \end{Bmatrix} = -7.112 \begin{Bmatrix} -0.75 \\ 1 \\ -0.75 \end{Bmatrix}$$

- Cuarta iteración

$$\begin{bmatrix} 3.5556 & -1.7778 & 0 \\ -1.7778 & 3.5556 & -1.7778 \\ 0 & -1.7778 & 3.5556 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.75 \\ 1 \\ -0.75 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.445 \\ 6.223 \\ -4.445 \end{Bmatrix} = 6.223 \begin{Bmatrix} -0.714 \\ 1 \\ -0.714 \end{Bmatrix}$$

- Quinta iteración

$$\begin{bmatrix} 3.5556 & -1.7778 & 0 \\ -1.7778 & 3.5556 & -1.7778 \\ 0 & -1.7778 & 3.5556 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.714 \\ 1 \\ -0.714 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.317 \\ 6.095 \\ -4.317 \end{Bmatrix} = 6.095 \begin{Bmatrix} -0.708 \\ 1 \\ -0.708 \end{Bmatrix}$$

Determinación del valor propio menor

- Se aplica el método de potencias a A^{-1}
- El método converge al valor mayor de $1/\lambda$, es decir al menor valor de λ
- Algoritmo en Octave: potencias.m

Problemas 27.1 a 27.29, pag. 822